ПРЯМОЛИНЕЙНАЯ
ТРИГОНОМЕТРІЯ
и
СОБРАНІЕ
ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХЪ ЗАДАЧЪ.

составилъ

Е. Пржевальскій,

преподаватель 3-го военнаго Александровскаго училища.

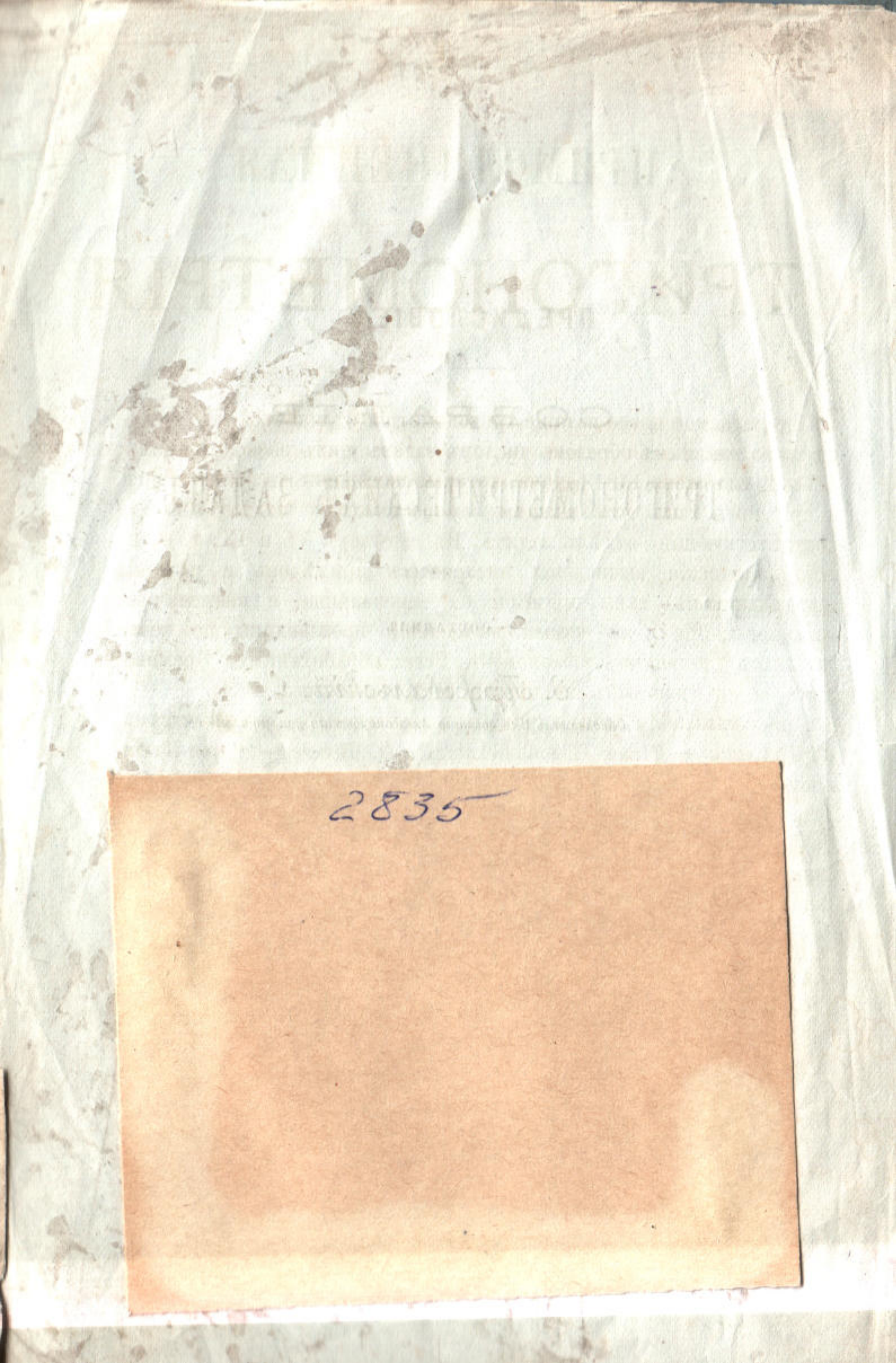
ИЗДАНІЕ ТРЕТЬЕ, ИСПРАВЛЕННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ.

ИЗДАНІЕ КНИЖНАГО МАГАЗИНА
НАСЛѢДНИКОВЪ
БРАТЬЕВЪ САЛАЕВЫХЪ.





МОСКВА.
Типографія Э. Лисснеръ и Ю. Романъ
Арбатъ, домъ Каринской.
1884.


2835

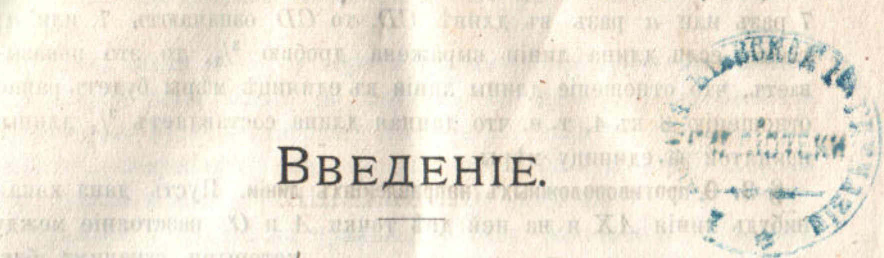
ПРЕДИСЛОВІЕ.

Предлагаемое новое изданіе тригонометріи отличается отъ предъидущаго главнымъ образомъ числомъ задачъ и ихъ расположеніемъ; здѣсь предложено 1491 задача, которыя помѣщены въ концѣ книги, и при томъ такъ, что каждому теоретическому отдѣлу имѣется соотвѣтствующій отдѣлъ задачъ. Въ отдѣлахъ VI и IX, т. е. на логариѳмическія вычисленія численныхъ примѣровъ и рѣшенія треугольниковъ, даны примѣры на семизначные и пятизначные логариѳмы; при чемъ самыя вычисленія произведены по семизначнымъ таблицамъ логариѳмовъ Вега, обработанныхъ Бремикеромъ, и пятизначнымъ таблицамъ логариѳмовъ, изд. мною.

При составленіи этого курса я пользовался слѣд. руководствами: *J. Todhunter* — Plane Trigonometry; *R. D. Beasley* — Plane Trigonometry; *J. C. Snowball* — The elements of plane and spherical Trigonometrie; *Colenso's* — Plane Trigonometry; *J. A. Serret* — Traité de Trigonométrie; *A. Desboves* — Questions de Trigonométrie rectiligne; *Dr. F. Reidt* — Sammlung von Aufgaben und Beispielen aus der Trigonometrie und Stereometrie и *Мейена* — Низшій курсъ Геодезіи, изъ которой заимствованы чертежи для X отдѣла.

Е. Пржевальскій.

ОГЛАВЛЕНІЕ.



Введеніе.

Неудобство графическихъ способовъ опредѣленія частей прямолинейныхъ фигуръ. — Измѣреніе прямой. — О противоположныхъ направленіяхъ линіи. — Измѣреніе угловъ и опредѣленіе относительнаго положенія угловъ на плоскости. — Обобщеніе понятія объ углѣ. — О круговомъ измѣреніи угла.

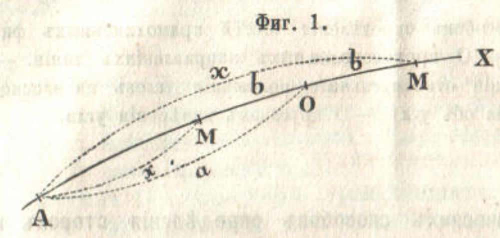
§ 1. Неудобство графическихъ способовъ опредѣленія сторонъ и угловъ въ прямолинейныхъ фигурахъ. При рѣшеніи практическихъ, а также и теоретическихъ вопросовъ, иногда требуется по достаточному числу данныхъ въ треугольникѣ или многоугольникѣ опредѣлить его остальныя части. Въ начальной геометріи были уже изложены способы построенія прямолинейныхъ фигуръ по достаточному числу въ нихъ данныхъ и опредѣленія численной величины искомыхъ помощію масштаба и транспортира. Изложенный способъ опредѣленія неизвѣстныхъ, называемый *графическимъ*, хотя по теоріи легокъ и точенъ, но по причинѣ несовершенства инструментовъ, представляетъ то неудобство, что неизвѣстныя опредѣляются только приблизительно и притомъ такъ, что погрѣшность не можетъ быть сдѣлана сколь угодно малою. Это послѣднее обстоятельство и побудило розыскать формулы для вычисленія неизвѣстныхъ частей треугольника въ зависимости отъ данныхъ чрезъ введеніе особыхъ отношеній, опредѣляющихъ величины угловъ. Но прежде, чѣмъ приступимъ къ изложенію этихъ способовъ, скажемъ нѣсколько словъ объ измѣреніи линій и угловъ, а также и ихъ относительномъ положеніи.

§ 2. Измѣреніе прямой. Для измѣренія прямой, принимаютъ одну изъ опредѣленныхъ прямыхъ за единицу мѣры длины и узнаютъ отношеніе опредѣляемой длины къ длинѣ, принятой за единицу мѣры; а такъ какъ отношеніе этихъ линій будетъ нѣкоторое чи-

сло, то поэтому обыкновенно линію и означають этимъ числомъ. Напр., если длина AB, принятая за единицу мѣры, заключается 7 разъ или a разъ въ длинѣ CD, то CD означаютъ 7 или a; также, если длина линіи выражена дробью $^3/_4$, то это показываетъ, что отношеніе длины линіи къ единицѣ мѣры будетъ равно отношенію 3 къ 4, т. е. что данная длина составляетъ $^3/_4$ длины, принятой за единицу мѣры.

§ 3. О противоположныхъ направленіяхъ линіи. Пусть дана какая нибудь линія AX и на ней двѣ точки A и O, разстояніе между которыми означимъ буквою a; также положимъ, что извѣстно разстояніе b отъ точки O до точки M этой линіи и мы желаемъ найти разстояніе отъ точки M до точки A. Если означимъ буквою x этор азстояніе, то

Фиг. 1.



$$x = a + b \text{ и } x = a - b, \quad (1)$$

смотря потому въ какую сторону лежитъ точка M отъ точки O; отсюда видимъ, что для опредѣленія искомаго разстоянія x нужно взять двѣ формулы. Но эти формулы можно соединить въ одну, написавъ

$$x = a + z,$$

гдѣ, для полученія первой формулы, надо положить $z = +b$, а для полученія второй, положить $z = -b$; первое положеніе, т. е. $z = +b = +OM$ соотвѣтствуетъ точкѣ M, лежащей вправо отъ O на разстояніи b, а второе положеніе, т. е. $z = -b = -OM$ соотвѣтствуетъ точкѣ M, лежащей влѣво отъ O на разстояніи b. Поэтому, если *условимся* разстоянія, считаемыя отъ точки O вправо, выражать числами съ знакомъ $+$, а разстоянія, считаемыя отъ точки O влѣво, числами съ знакомъ $-$, то разстояніе всякой точки M до точки A выразится формулою: $x = a + z$.

Теперь положимъ, что точка A совпадаетъ съ O, т. е. $a = 0$; тогда $x = z$, и $z = +b$ или $x = +b$ будетъ выражать разстояніе отъ точки O до точки M, лежащей вправо отъ O, а $z = -b$ или $x = -b$ будетъ выражать разстояніе отъ O до точки M, лежащей влѣво отъ O. Въ этомъ случаѣ точка O наз. *началомъ*.

Формулы (1) можно соединить также въ одну вида: $x = a - z$; но тогда надо разстоянія съ + считать влѣво отъ O, а съ — вправо.

И такъ знаки + и — передъ числами, выражающими разстоянія данной точки линіи до другихъ ея точекъ, употребляются *условно* для отличія сторонъ. Мы будемъ, если не скажемъ противнаго, употреблять знакъ + для правой (или верхней) стороны отъ начала и знакъ — для лѣвой (или нижней).

Примѣръ I. Найти на прямой AB точку, отстоящую отъ данной точки O, принятой за начало, на разстояніи — 3.

Фиг. 2.

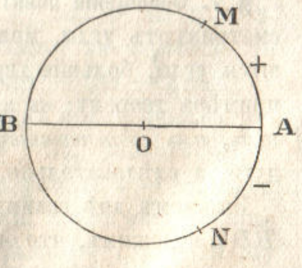
Если дана единица мѣры, то откладываемъ по AB, влѣво отъ O, три такихъ единицы и получаемъ искомую точку M; если же единица мѣры не дана, то принимаемъ какую либо опредѣленную прямую за единицу мѣры и поступаемъ какъ сказано.

Примѣръ II. Найти на прямой CD (фиг. 2) точку, отстоящую отъ данной точки O, принятой за начало, на разстояніи — 2.

Отложимъ отъ точки O внизъ двѣ единицы длины и получимъ искомую точку N.

§ 4. Точно также, если по окружности круга будемъ означать дуги, отсчитываемыя отъ точки A вверхъ, числами съ +, то дуги, отсчитываемыя отъ точки A внизъ, надо означать числами съ —. Такъ, если отложимъ отъ A вверхъ $AM = 60^0$ и внизъ $AN = 60^0$, то первая дуга выразится чрезъ $+60^0$ или просто 60^0, а вторая чрезъ -60^0.

Фиг. 3.



§ 5. Измѣреніе угловъ. При измѣреніи угловъ принимаютъ прямой уголъ за единицу мѣры и дѣлятъ его на 90 *) равныхъ частей, наз. *градусами;* уголъ въ градусъ дѣлятъ на 60 равныхъ

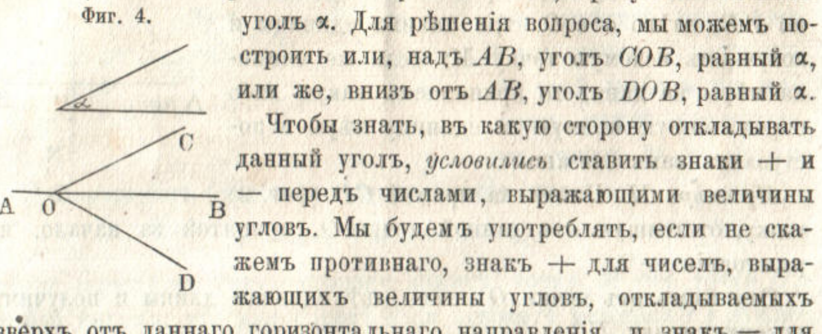
---

*) Во Франціи былъ предложенъ другой способъ дѣленія прямаго угла, но не вошелъ въ употребленіе. Онъ состоитъ въ томъ, что прямой уголъ дѣлятъ на 100 равныхъ частей, наз. *градами;* каждый градъ на 100 минутъ и каждую минуту на 100 секундъ.

частей, наз. *минутами;* уголъ въ минуту дѣлятъ на 60 равныхъ частей, наз. *секундами;* части же меньшія секунды выражаютъ въ доляхъ секунды. Прямой уголъ обыкновенно означаютъ буквою d, а градусы, минуты и секунды посредствомъ знаковъ: ^{0}, $'$ и $''$; такимъ образомъ половину прямаго — пишутъ $^1/_2d$; 15 градусовъ 8 минутъ и 6,5 секунды — пишутъ $15^08'6'',5$. Слѣдовательно, уголъ будетъ извѣстенъ, если знаемъ его отношеніе къ прямому углу или, все равно, знаемъ сколько въ немъ содержится градусовъ, минутъ и секундъ.

§ 6. Опредѣленіе относительнаго положенія угла на плоскости. Положимъ, что на прямой AB при точкѣ O, требуется отложить уголъ α. Для рѣшенія вопроса, мы можемъ построить или, надъ AB, уголъ COB, равный α, или же, внизъ отъ AB, уголъ DOB, равный α.

Фиг. 4.



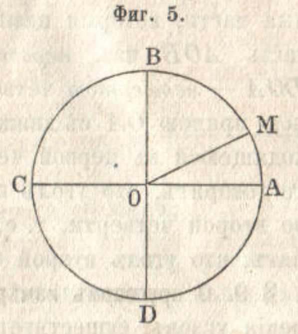
Чтобы знать, въ какую сторону откладывать данный уголъ, *условились* ставить знаки + и — передъ числами, выражающими величины угловъ. Мы будемъ употреблять, если не скажемъ противнаго, знакъ + для чиселъ, выражающихъ величины угловъ, откладываемыхъ вверхъ отъ даннаго горизонтальнаго направленія, и знакъ — для чиселъ, выражающихъ величины угловъ, откладываемыхъ внизъ отъ даннаго горизонтальнаго направленія.

§ 7. Обобщеніе понятія объ углѣ. Въ геометріи обыкновенно разсматриваютъ углы, меньшіе двухъ прямыхъ, хотя и не исключаются углы, большіе двухъ прямыхъ. Дѣйствительно, возьмемъ для примѣра теорему; *въ кругѣ центральные углы пропорціональны дугамъ, имъ соотвѣтствующимъ;* здѣсь нѣтъ предѣла для увеличенія дуги, а слѣдовательно, и нѣтъ предѣла для увеличенія угла.

Возьмемъ двѣ взаимно-перпендикулярныя прямыя (фиг. 5) AC и BD и положимъ, что опредѣленная прямая OM вращается вверхъ отъ первоначальнаго положенія OA и около своего конца O, не выходя изъ плоскости. Когда прямая OM займетъ положеніе, указанное на 5 чертежѣ, то составитъ съ OA уголъ AOM; когда OM совпадетъ съ направленіемъ OB, то уголъ, описанный OM, будетъ прямой; когда OM совпадетъ съ направленіемъ OC, то уголъ, описанный OM, будетъ равенъ двумъ прямымъ; когда OM совпадаетъ съ OD, то уголъ, описанный OM, будетъ равенъ тремъ пря-

мымъ и, наконецъ, когда OM совпадетъ опять съ OD, то уголъ описанный OM, будетъ равенъ четыремъ прямымъ. Если будемъ продолжать OM вращать, то уголъ, описываемый OM, будетъ болѣе четырехъ прямыхъ; такъ когда OM совпадетъ съ направленіемъ OB, то уголъ, описанный OM, будетъ равенъ пяти прямымъ и т. д. Слѣдовательно, если прямая OM заняла положеніе, указанное на чертежѣ, при *первомъ* ея вращеніи, то уголъ между OA и OM равенъ углу AOM или, означивъ уголъ AOM буквою α, равенъ α; если прямая OM заняла положеніе, указанное на чертежѣ, при *второмъ* вращеніи, то уголъ, описанный прямою OM, равенъ $\alpha + 4d$; если OM заняла положеніе, указанное на чертежѣ, при *третьемъ* вращеніи, то уголъ, описанный OM, равенъ $\alpha + 2\,.\,4d$ и т. д., и, наконецъ, уголъ, описанный прямою OM при $n + 1$ вращеніи, равенъ $\alpha + n.4d = \alpha + n.360^0 = \alpha + 2n.180^0$, гдѣ n цѣлое и положительное число. Когда же OM будемъ вращать внизъ отъ первоначальнаго положенія OA, то углы будутъ выражаться отрицательными числами (§ 6); такъ, когда OM совпадетъ съ OD, то число для угла, описаннаго OM, выразится чрезъ $-\,d$; когда OM совпадетъ съ OC, то, число для угла, описаннаго прямою OM, выразится чрезъ $-\,2d$, потомъ чрезъ $-\,3d$, $-\,4d$ и т. д. Слѣдов., когда OM займетъ положеніе, указанное на чертежѣ, то число для угла, описаннаго OM, будетъ равно $-(3d + BOM) = -[3d + (d - \alpha)] = -(4d - \alpha)$; но этотъ уголъ можно разсматривать какъ результатъ вычитанія изъ угла α угла, равнаго $4d$, и потому уголъ описанный линіею OM, будетъ равенъ $\alpha - 4d$. Если OM займетъ положеніе, указанное на чертежѣ, послѣ *втораго* вращенія, то число для угла, описаннаго OM, равно: $-(7d + BOM) = -(7d + d - \alpha) = \alpha - 8d = \alpha - 2\,.\,4d$ и т. д.; вообще, если прямая OM послѣ n вращеній внизъ отъ OA займетъ положеніе, указанное на чертежѣ, то число для угла, описаннаго OM, выразится чрезъ $\alpha - n\,.\,4d = \alpha - 4nd = \alpha - 2n\,.\,180^0$, гдѣ n цѣлое и положительное число.

Фиг. 5.



Изъ этихъ разсужденій видимъ, *что если въ данномъ углѣ одинъ изъ боковъ угла повернемъ въ ту или другую сторону на учетверен-*

ное число прямыхъ угловъ, то онъ приметъ первоначальное направленіе.

§ 8. Прямыя AC и BD (фиг. 5) дѣлятъ кругъ на четыре равныя части, которыя называются *четвертями* круга (квадрантами); часть AOB наз. *первою*, BOC — *второю*, COD — *третьею* и DOA — *четвертою* четвертью. Если уголъ составленъ неподвижною прямою OA съ движущеюся вверхъ отъ нея прямою OM, находящеюся въ первой четверти, т.-е. уголъ болѣе 0^0 и менѣе 90^0, то говорятъ, что уголъ первой четверти; если прямая OM лежитъ во второй четверти, т.-е. уголъ болѣе 90^0 и менѣе 180^0, то говорятъ, что уголъ второй четверти и т. д.

§ 9. О круговомъ измѣреніи угла. Кромѣ указаннаго способа измѣренія угловъ, существуетъ еще другой способъ, о которомъ сейчасъ сообщимъ и который часто употребляется въ математикѣ. Докажемъ сперва, что *въ кругѣ центральный уголъ, опирающійся на дугу, равную радіусу круга, есть величина постоянная.*

Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ дугу AB, равную радіусу OA, и точки A и B соединимъ прямыми съ центромъ O дуги AB; тогда, зная, что въ кругѣ центральные углы пропорціональны дугамъ, имъ соотвѣтствующимъ, можемъ написать:

Фиг. 6.

$$\frac{\angle AOB}{4d} = \frac{\text{дуга } AB}{\text{окруж. круга}};$$

но дуга AB равна радіусу OA, который означимъ буквою r, а окружность круга равна $2\pi r$ и потому

$$\frac{\angle AOB}{4d} = \frac{r}{2\pi r} \text{ или } \frac{\angle AOB}{4d} = \frac{1}{2\pi},$$

откуда

$$\angle AOB = \frac{4d}{2\pi} = \frac{2d}{\pi},$$

гдѣ d и π суть величины постоянныя. Изъ этого равенства видимъ, что уголъ AOB есть величина постоянная, какой бы ни былъ радіусъ круга.

§ 10. Такъ какъ центральный уголъ въ кругѣ, опирающійся на дугу, равную радіусу, есть постоянный уголъ, то можно принять его за единицу мѣры для угловъ, и тогда каждый изъ другихъ угловъ можетъ быть выраженъ помощію этой единицы мѣры. Дѣй-

ствительно, возьмемъ какой-нибудь уголъ COA и изъ точки O опишемъ дугу радіусомъ OA; отложимъ отъ точки A дугу AB, равную радіусу OA, и точку B соединимъ съ центромъ; найдемъ:

Фиг. 7.

C B O A

$$\frac{\angle AOC}{\angle AOB} = \frac{\text{дуга } AC}{\text{дуга } AB}.$$

Означивъ дугу AC буквою l, а радіусъ OA буквою r, получимъ:

$$\frac{\angle AOC}{\angle AOB} = \frac{l}{r}; \quad \text{откуда } \angle AOC = \frac{l}{r} \cdot \angle AOB;$$

это равенство справедливо при всякой единицѣ мѣры угловъ, а потому, принявъ уголъ AOB за единицу мѣры угловъ, найдемъ:

$$\angle AOC = \frac{l}{r};$$

слѣд., *уголъ можетъ быть выраженъ дробью, у которой числитель есть дуга, описанная изъ вершины угла и заключающаяся между его боками, а знаменатель — радіусъ дуги;* эта дробь выражена въ частяхъ угла, принятаго за единицу мѣры и равнаго (§ 9) $\frac{2d}{\pi}$.

§ 11. Не трудно опредѣлить число градусовъ, заключающихся въ углѣ, принятомъ за единицу мѣры; онъ равенъ $\frac{2d}{\pi} = \frac{180^0}{\pi} =$ 57,29577951 ... градуса или равенъ $57^0 17' 44'',806$ съ точностью до 0,001 секунды. Слѣдовательно, если, напр. уголъ равенъ $^2/_3$, то это значитъ, что онъ составляетъ $^2/_3$ угла, принятаго за единицу мѣры и равняется $^2/_3 . 57,29577951....$ градуса, что составляетъ $38^0 11' 49'',87$ съ точностью до $0'',01$.

§ 12. Дробь, происшедшая отъ дѣленія дуги на соотвѣтствующій радіусъ, называется *круговою мѣрою угла.* Напр., если означимъ радіусъ окружности буквою r, то круговая мѣра четырехъ прямыхъ угловъ будетъ $\frac{2\pi r}{r} = 2\pi$; круговая мѣра двухъ прямыхъ угловъ будетъ π; круговая мѣра прямаго угла будетъ $\frac{\pi}{2}$; круговая мѣ-

n прямыхъ угловъ будетъ $\frac{n\pi}{2}$; круговая мѣра угла въ 45^0 бу-

детъ $\frac{\pi}{4}\cdot$ Также, если круговая мѣра угла AOM (фиг. 5) при первомъ вращеніи OM была ϑ, то круговая мѣра угла AOM, когда прямая OM сдѣлала нѣсколько оборотовъ въ ту или другую сторону отъ OA, будетъ $\vartheta + 2n\pi$, гдѣ n цѣлое, положительное или отрицательное число.

§ 13. Зная число градусовъ въ углѣ, легко опредѣлить его угловую мѣру и обратно. Дѣйствительно, пусть a означаетъ число градусовъ въ данномъ углѣ и ϑ круговую мѣру этого же угла; тогда въ двухъ прямыхъ углахъ заключается 180^0, а потому дробь $\frac{a}{180}$ выражаетъ отношеніе даннаго угла къ двумъ прямымъ; круговая мѣра двухъ прямыхъ угловъ естѣ π, а потому дробь $\frac{\vartheta}{\pi}$ выражаетъ также отношеніе даннаго угла къ двумъ прямымъ; слѣдовательно,

$$\frac{a}{180} = \frac{\vartheta}{\pi};$$

откуда

$$\vartheta = \frac{\pi a}{180} \dots\dots (m) \text{ и } a = \frac{180.\vartheta}{\pi} \dots\dots (n)$$

Помощію этихъ формулъ можно перейти отъ градуснаго измѣренія угла къ круговой мѣрѣ угла и обратно.

Примѣръ I. Опредѣлить круговую мѣру угла, равнаго 9^0. Подставивъ въ (m) формулу 9 вмѣсто a, найдемъ, что круговая мѣра угла въ 9^0 равна $\frac{9\pi}{180} = \frac{\pi}{20} = 0,157079632679 \dots$

Примѣръ II. Опредѣлить круговую мѣру угла, равнаго минутѣ. Минута составляетъ $^1/_{60}$ градуса, а потому, подставивъ въ (m) формулу $^1/_{60}$ вмѣсто a, найдемъ: $\vartheta = \frac{\pi}{180.60} = 0,0002908882\dots$

Примѣръ III. Опредѣлить круговую мѣру угла, равнаго 1 секундѣ. Секунда составляетъ $\frac{1}{60.60}$ часть градуса, а потому, подставивъ въ формулѣ (m) $\frac{1}{60.60}$ вмѣсто a, найдемъ, что круговая мѣра угла въ секунду равна $\frac{\pi}{180.60.60} = 0,000004848\dots$

Примѣръ IV. Круговая мѣра угла есть $^3/_4$; опредѣлить величину угла въ градусахъ. Подставивъ въ (n) формулѣ $^3/_4$ вмѣсто ϑ, найдемъ, что число градусовъ въ данномъ углѣ есть $\frac{3}{4} \cdot \frac{180}{\pi}$; но (§ 11) $\frac{180^0}{\pi} = 57,29577951\ldots$ градуса, а потому въ данномъ углѣ заключается $^3/_4 \cdot 57,29577951\ldots$ градуса или $42^0 58' 18'',6$ съ точностью до 0,1 секунды.

§ 14. Для избѣжанія большихъ перемноженій и дѣленій при переходѣ отъ круговаго измѣренія угла къ измѣренію угла градусами и обратно, составлена особая таблица, съ помощію которой вычисленіе упрощается. Читатель эту таблицу можетъ найти въ семизначныхъ таблицахъ логариѳмовъ Вега (стр. 288), гдѣ она озаглавлена такъ: *длина обвода круга для радіуса 1* и въ пятизначныхъ таблицахъ логариѳмовъ, изданныхъ мною (стр. 156 и 157), гдѣ она озаглавлена такъ: *длина дуги круга при радіусѣ равномъ 1.* Эта таблица, взятая въ логариѳмахъ Вега или въ пятизначныхъ таблицахъ, вертикальными прямыми раздѣлена на части съ надписями сверху: градусы, минуты и секунды; рядомъ съ числомъ градусовъ, минутъ и секундъ стоятъ числа, показывающія круговую мѣру угловъ, соотвѣтствующихъ взятому числу градусовъ, минутъ и секундъ. Напр., рядомъ съ 75^0 стоитъ число 1,3089969, показывающее, что круговая мѣра угла въ 75^0 есть 1,3089969.

Примѣръ I. Опредѣлить круговую мѣру угла, содержащаго $165^0 43' 26'',64$.

Въ этой таблицѣ находимъ:

165^0 соотвѣтствуетъ	2,8797933
$43'$	0,0125082
$26''$	0,0001261
$0'',6$	0,0000029
$0'',04$	0,0000002
Искомая круг. мѣра =	2,8924307.

Примѣръ II. Круговая мѣра угла равна 1,47683; найти величину угла въ градусахъ.

Въ той же таблицѣ ищемъ данное число, а если его нѣтъ, то ближайшее меньшее; находимъ: 1,4660766, которому соотвѣтствуетъ 84^0; найденное число 1,4660766 вычитаемъ изъ даннаго числа и получаемъ: 0,0107534. Ищемъ ближайшее меньшее число къ

полученному остатку и находимъ: 0,0104720, которому соотвѣтствуетъ 36′; найденное число 0,0104720 вычитаемъ изъ перваго остатка и получаемъ: 0,0002814. Опять ищемъ ближайшее меньшее число къ второму остатку и находимъ: 0,0002812, которому соотвѣтствуетъ 58″; найденное число 0,0002812 вычитаемъ изъ 0,0002814 и находимъ: 0,0000002. Ближайшаго меньшаго числа къ этому остатку нѣтъ въ таблицѣ, а потому увеличиваемъ его въ 10 разъ; получаемъ: 0,0000020 и ищемъ къ нему ближайшее меньшее число; въ таблицѣ не находится такого числа, а потому число 0,0000020 увеличиваемъ еще въ 10 разъ; находимъ: 0,0000200; къ этому числу въ таблицѣ есть ближайше 0,0000194, которому соотвѣтствуетъ 4″; слѣдовательно, числу 0,0000002 соотвѣтствуетъ число секундъ во 100 разъ меньшее 4″, т. е. 0″,04.

И такъ, данный уголъ содержитъ 84°36′58″,04, съ точн. до 0″,01. Самыя дѣйствія располагаютъ такъ:

$$
\begin{array}{l}
1{,}47683 \\
\underline{1{,}4660766\ .\ .\ .\ .84^{0}} \\
0{,}0107534 \\
\underline{0{,}0104720\ .\ .\ .\ .36'} \\
0{,}0002814 \\
\underline{\qquad 2812\ .\ .\ .\ .58''} \\
0{,}0000002\ .\ .\ .\ .0'',04.
\end{array}
$$

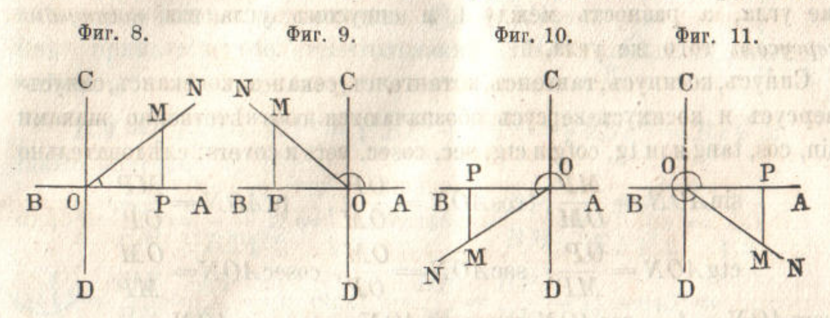
ОТДѢЛЪ I.

Предметъ тригонометріи. — Тригонометрическія величины. — Измѣненія тригонометрическихъ величинъ съ измѣненіемъ угла. — Опредѣленіе тригонометрическихъ величинъ для отрицательнаго угла. — Отношенія между тригонометрическими величинами для одного и того же угла. — Объ опредѣленіяхъ тригонометрическихъ величинъ.

§ 15. Предметъ тригонометріи и тригонометрическія величины. Слово тригонометрія происходитъ отъ двухъ греческихъ словъ: τριγωνον-*треугольникъ* и μετρέο — *измѣряю*. Первоначально предметъ тригонометріи состоялъ въ опредѣленіи (вычисленіи) неизвѣстныхъ частей треугольника, когда въ немъ имѣлось достаточное число данныхъ, помощію формулъ, выражающихъ отношенія между углами и сторонами прямолинейнаго или сферическаго треугольника; смотря по

тому, какой разсматривался треугольникъ, тригонометрія дѣлилась на двѣ части: *плоскую* и *сферическую*. Въ настоящее время это дѣленіе тригонометріи хотя и осталось, но предметъ плоской или прямолинейной тригонометріи имѣетъ болѣе обширное значеніе, какъ увидимъ послѣ.

§ 16. Возьмемъ двѣ взаимно перпендикулярныя прямыя AB и CD, пересѣкающіяся въ точкѣ O; пусть прямая ON вращается



въ той же плоскости, гдѣ AB и CD, около точки O и влѣво отъ прямой OA, съ которою она первоначально совпадала, т. е. по направленію къ OC, OB, OD и т. д. и заняла послѣдовательно положенія, указанныя на 8, 9, 10 и 11 фигурахъ; тогда углы, описанные прямою OM, считая отъ OA, будутъ тѣ, которые отчеркнуты на этихъ фигурахъ. Изъ какой-нибудь точки M, взятой на прямой ON, опустимъ перпендикуляръ MP на AB и будемъ длину линіи OM считать всегда положительною, а OP (проекцію OM на AB) будемъ считать положительною, когда она лежитъ вправо отъ O (фиг. 8 и 11), и отрицательною, когда она лежитъ влѣво отъ точки O (фиг. 9 и 10); точно также длину проектирующаго перпендикуляра MP будемъ считать положительною, когда онъ лежитъ вверхъ отъ AB (фиг. 8 и 9), и отрицательною, когда онъ лежитъ внизъ отъ AB (фиг. 10 и 11). При всякомъ положеніи линіи ON,

отношеніе MP къ OM, т. е. перпендикуляра къ наклонной, наз. *синусомъ* угла AON;

отношеніе OP къ OM, т. е. проекціи наклонной къ самой наклонной, наз. *косинусомъ* угла AON;

отношеніе MP къ OP, т. е. перпендикуляра къ проекціи наклонной, наз. *тангенсомъ* угла AON;

отношеніе OP къ MP, т. е. проекціи наклонной къ перпендикуляру, наз. *котангенсомъ* угла AON;
отношеніе OM къ OP, т. е. наклонной къ ея проекціи, наз. *секансомъ* угла AON и
отношеніе OM къ MP, т. е. наклонной къ перпендикуляру, наз. *косекансомъ* угла AON.

Разность между 1 и косинусомъ угла наз. *синусомъ версусомъ* того же угла, а разность между 1 и синусомъ угла наз. *косинусомъ версусомъ* того же угла.

Синусъ, косинусъ, тангенсъ, котангенсъ, секансъ, косекансъ, синусъ-версусъ и косинусъ-версусъ обозначаются соотвѣтственно знаками sin, cos, tang или tg, cotg и ctg, sec, cosec, vers и covers; слѣдовательно

$$\sin AON = \frac{MP}{OM},\quad \cos AON = \frac{OP}{OM},\quad \operatorname{tg} AON = \frac{MP}{OP},$$

$$\operatorname{ctg} AON = \frac{OP}{MP},\quad \sec AON = \frac{OM}{OP},\quad \operatorname{cosec} AON = \frac{OM}{MP},$$

$\operatorname{vers} AON = 1 - \cos AON$ и $\operatorname{covers} AON = 1 - \sin AON$.

§ 17. Sin, cos, tg, ctg, sec, cosec, vers и covers наз. *тригонометрическими отношеніями* или *величинами;* подъ этими названіями должно подразумѣвать не длины, а отношенія длинъ, и потому тригонометрическія величины суть *отвлеченныя числа.*

Предметъ тригонометріи состоитъ въ изслѣдованіи свойствъ и отношеній между тригонометрическими величинами.

§ 18. Тригонометрическія величины для угла не измѣнятся до тѣхъ поръ, пока не измѣнимъ угла. Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ какой нибудь уголъ ABC и изъ какихъ либо точекъ $M, N,..$ прямой BC опустимъ перпендикуляры $MP, NQ,..$ на сторону AB и изъ какихъ либо точекъ $K, L,...$ прямой AB опустимъ перпендикуляры $KR, LS,..$ на BC; тогда, изъ подобія треугольниковъ BMP, BNQ, BKR, BLS,... получимъ:

Фиг. 12.

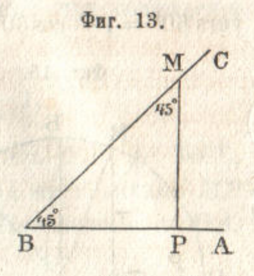
$$\frac{MP}{BM} = \frac{NQ}{BN} = \frac{KR}{BK} = \frac{LS}{BL} = \ldots$$

Но каждое изъ этихъ отношеній есть (§ 16) $\sin B$, а потому выходитъ, что синусъ угла B останется тотъ же самый — разсматриваемъ ли треугольникъ BMP, или треугольникъ BNQ и т. д. Беря другія отношенія сторонъ этихъ треугольниковъ, увидимъ, что и

другія тригонометрическія величины будутъ тѣ же, какой бы не разсматривали треугольникъ.

§ 19. Задача 1. *Опредѣлить тригонометрическія величины для угла въ 45°.*

Фиг. 13.



Начертимъ уголъ $ABC = 45^0$ изъ точки M, взятой произвольно на BC, опустимъ перпендикуляръ MP на AB; тогда, уголъ $BMP = 90^0 - B = 45^0$ и слѣдовательно $BP = MP$. Изъ прямоугольнаго треугольника BMP имѣемъ:

$$BM = \sqrt{BP^2 + MP^2} = \sqrt{BP^2 + BP^2} = \sqrt{2BP^2} = BP\sqrt{2};$$

также получимъ (§ 16):

$$\sin 45^0 = \frac{MP}{BM} = \frac{BP}{BP\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \ \cos 45^0 = \frac{BP}{BM} = \frac{BP}{BP\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\text{tg}\,45^0 = \frac{MP}{BP} = \frac{BP}{BP} = 1; \ \text{ctg}\,45^0 = \frac{BP}{MP} = \frac{BP}{BP} = 1; \ \sec 45^0 =$$

$$= \frac{BM}{BP} = \frac{BP\sqrt{2}}{BP} = \sqrt{2}; \ \text{cosec}\,45^0 = \frac{BM}{MP} = \frac{BP\sqrt{2}}{BP} = \sqrt{2}; \ \text{vers}\,45^0 =$$

$$= 1 - \cos 45^0 = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ и } \text{covers}\,45^0 = 1 - \sin 45^0 = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

§ 20. Задача 2. *Опредѣлить тригонометрическія величины для угла въ 60°.*

Фиг. 14.

Возьмемъ равносторонній треугольникъ ABC и изъ точки C опустимъ перпендикуляръ CD на AB, который раздѣлитъ сторону AB на двѣ равныя части; слѣдовательно $AD = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}AC$. Изъ прямоугольнаго треугольника ACD, имѣемъ:

$$CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{AC^2 - \frac{1}{4}AC^2} =$$
$$= \sqrt{\frac{3}{4}AC^2} = \frac{1}{2}AC\sqrt{3}.$$

Каждый изъ угловъ треугольника ABC содержитъ по 60^0, а потому

$$\sin 60^0 = \frac{CD}{AC} = \frac{\frac{1}{2}AC\sqrt{3}}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \ \cos 60^0 = \frac{AD}{AC} = \frac{\frac{1}{2}AC}{AC} = \frac{1}{2};$$

$$\text{tg}\,60^0 = \frac{CD}{AD} = \frac{\frac{1}{2}AC\sqrt{3}}{\frac{1}{2}AC} = \sqrt{3}; \ \text{ctg}\,60^0 = \frac{AD}{CD} = \frac{\frac{1}{2}AC}{\frac{1}{2}AC\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$\sec 60^0 = \frac{AC}{AD} = \frac{AC}{{}^1/_2 AC} = 2;\ \operatorname{cosec} 60^0 = \frac{AC}{CD} = \frac{AC}{{}^1/_2 AC\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

$$\operatorname{vers} 60^0 = 1 - \cos 60^0 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ и } \operatorname{covers} 60^0 = 1 - \sin 60^0 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Фиг. 15.

§ 21. Измѣненія тригонометрическихъ величинъ съ измѣненіемъ угла. Возьмемъ двѣ взаимно-перпендикулярныя прямыя AC и BD и предположимъ, что опредѣленная прямая OM вращается вверхъ отъ OA около своего конца O, не выходя изъ плоскости; тогда другой конецъ ее M опишетъ, при своемъ движеніи, окружность $ABCD$. Изъ точки M опустимъ перпендикуляръ MP на прямую AC и разсмотримъ отдѣльно измѣненія каждой изъ тригонометрическихъ величинъ.

§ 22. *Измѣненія синуса* (фиг. 15). Намъ извѣстно (§ 16), что

$$\sin AOM = \frac{MP}{OM}.$$

Когда OM совпадаетъ съ OA, то уголъ $AOM = 0^0$ и $MP = 0$; слѣдовательно

$$\sin 0^0 = \frac{0}{OM} = 0.$$

Когда OM двигается въ первой четверти и вверхъ отъ OA, то MP будетъ положительнымъ (§ 3) и будетъ увеличиваться, потому что MP есть полухорда круга, которая увеличивается по мѣрѣ приближенія ея къ центру; слѣдовательно $\sin AOM$ будетъ также увеличиваться и наконецъ, когда OM совпадетъ съ OB, то уголъ AOM будетъ равенъ 90^0 и $MP = OB = OM$; поэтому

$$\sin 90^0 = \frac{OM}{OM} = 1.$$

Когда OM двигается во второй четверти (отъ 90^0 до 180^0), то MP остается положительнымъ и уменьшается по мѣрѣ приближенія OM къ OC, т. е. по мѣрѣ увеличенія угла AOM; когда же OM совпадаетъ съ OC, то $MP = 0$, уголъ $AOM = 180^0$ и

$$\sin 180^0 = \frac{0}{OM} = 0.$$

Когда OM двигается въ третьей четверти (отъ 180^0 до 270^0), то MP будетъ отрицательнымъ (§ 3); абсолютная же величина MP увеличивается и наконецъ достигаетъ $OD = OM$; при совпаденіи OM съ OD уголъ $AOM = 270^0$ и

$$\sin 270^0 = \frac{-OD}{OM} = -\frac{OM}{OM} = -1.$$

При движеніи OM въ четвертой четверти (отъ 270^0 до 360^0), MP остается отрицательнымъ (§ 3); абсолютная же величина MP уменьшается и будетъ равна нулю, когда OM совпадетъ съ OA, т. е. когда уголъ $AOM = 360^0$; получимъ:

$$\sin 360^0 = \frac{-0}{OM} = 0.$$

При дальнѣйшемъ движеніи линіи OM, синусъ очевидно будетъ измѣняться также, какъ и при первомъ ея вращеніи, потому что, повернувъ одинъ изъ боковъ угла въ ту или другую сторону на учетверенное число прямыхъ угловъ (§ 7), бока угла сохраняютъ тоже направленіе, какое имѣли при первомъ вращеніи; а потому, означивъ буквою α данный уголъ и буквою n — цѣлое число, найдемъ:

$$\sin(\alpha + n \,.\, 4d) = \sin(\alpha + 2n \,.\, 180^0) = \sin\alpha$$

или, означивъ круговую мѣру угла α буквою ϑ, получимъ:

$$\sin(\vartheta + 2n\pi) = \sin\vartheta.$$

Изъ предъидущаго видимъ, что для угловъ первой и второй четверти синусы будутъ положительные, а для угловъ третьей и четвертой — отрицательные; также замѣчаемъ, что величины синусовъ угловъ заключаются между $+1$ и -1.

Такъ какъ синусы положительные, когда уголъ заключается между 0 и 180^0, а отрицательные, когда уголъ заключается между 180^0 и 360^0, то поэтому (§ 7) синусы будутъ положительными, когда уголъ заключается между $2n \,.\, 180^0$ и $(2n+1)180^0$, гдѣ n цѣлое число, и — отрицательными, когда уголъ заключается между $(2n+1)180^0$ и $(2n+2)180^0$, гдѣ n цѣлое число.

§ 23. *Измѣненія косинуса* (фиг. 15). По опредѣленію косинуса (§ 16) имѣемъ:

$$\cos AOM = \frac{OP}{OM}.$$

Когда OM совпадаетъ съ OA, то $OP=OA$ и уголъ $AOM=0^\circ$; поэтому

$$\cos 0^\circ = \frac{OA}{OM} = \frac{OM}{OM} = 1.$$

Кога OM двигается въ первой четверти (отъ 0° до 90°), то OP будетъ положительнымъ (§ 3) и будетъ уменьшаться, а слѣдовательно и косинусъ угла AOM будетъ также уменьшаться; но, когда OM совпадетъ съ OB, то уголъ $AOM=90^\circ$ и $OP=0$; поэтому

$$\cos 90^\circ = \frac{0}{OM} = 0.$$

Двигаясь далѣе, во второй четверти (отъ 90° до 180°), OM приближается къ OC; здѣсь OP будетъ отрицательнымъ (§ 4), но абсолютная величина OP увеличивается по мѣрѣ приближенія OM къ OC. При совпаденіи OM съ OC, уголъ $AOM=180^\circ$, $OP=OC=OM$ и тогда

$$\cos 180^\circ = \frac{-OC}{OM} = -\frac{OM}{OM} = -1.$$

Когда OM двигается въ третьей четверти (отъ 180° до 270°), то OP будетъ отрицательнымъ (§ 3), а слѣдовательно и косинусы будутъ отрицательные; когда же OM совпадаетъ съ OD, то уголъ AOM будетъ равенъ 270° и $OP=0$. Поэтому

$$\cos 270^\circ = \frac{-0}{OM} = 0.$$

При движеніи OM въ четвертой четверти (отъ 270° до 360°), OP будетъ положительнымъ (§ 3) и будетъ увеличиваться по мѣрѣ увеличенія угла AOM; когда же OM совпадетъ съ OA, то уголъ AOM будетъ равняться 360° и $OP=OA=OM$; а потому

$$\cos 360^\circ = \frac{OP}{OM} = \frac{OM}{OM} = 1.$$

Продолжая двигать OM далѣе, увидимъ, что косинусъ будетъ измѣняться, какъ и при первомъ вращеніи линіи OM. Поэтому можемъ написать, какъ и для синуса, что
$\cos(\alpha+4nd)=\cos(\alpha+2n\,.\,180^\circ)=\cos\alpha$ и $\cos(\vartheta+2n\pi)=\cos\vartheta$,
гдѣ n цѣлое, положительное или отрицательное число.

§ 24. *Измѣненія тангенса* (фиг. 15). На основаніи опредѣленія (§ 16) можемъ написать:

$$\operatorname{tg} AOM = \frac{MP}{OP}.$$

Когда OM совпадаетъ съ OA, то уголъ $AOM=0^0$, $MP=0$ и $OP=OA$; а потому

$$\operatorname{tg} 0^0 = \frac{0}{OA} = 0.$$

Когда OM двигается въ первой четверти (отъ 0^0 до 90^0), т. е. отъ OA къ OB, то MP будетъ положительнымъ (§ 3) и будетъ увеличиваться, а OP будетъ положительнымъ и — уменьшаться; отсюда видимъ, что для угловъ первой четверти тангенсы увеличиваются съ увеличеніемъ угла. Когда же OM совпадетъ съ OB, то уголъ $AOM=90^0$, $MP=OB$, $OP=0$ и

$$\operatorname{tg} 90^0 = \frac{OB}{0} = \infty.$$

Продолжая OM двигать далѣе, замѣтимъ, что, во второй четверти (отъ 90^0 до 180^0), MP будетъ положительнымъ, а OP отрицательнымъ (§ 3), а потому тангенсы будутъ отрицательные; когда же OM совпадетъ съ OC, то уголъ $AOM=180^0$, $MP=0$, $OP=OC=OM$ и

$$\operatorname{tg} 180^0 = \frac{0}{-OM} = 0 \text{ *)}.$$

Въ третьей четверти (отъ 180^0 до 270^0), OM двигается отъ OC къ OD; здѣсь MP и OP отрицательные (§ 3); при чемъ абсолютная величина MP возрастаетъ, а OP — уменьшается; слѣдов. тангенсы въ этой четверти будутъ положительные и будутъ увеличиваться по мѣрѣ увеличенія угла. Когда же OM совпадаетъ съ OD, то $MP=OD$, $OP=0$ и уголъ $AOM=270^0$; поэтому

$$\operatorname{tg} 270^0 = \frac{-OD}{-0} = \infty.$$

Наконецъ, когда OM двигается въ четвертой четверти (отъ 270^0 до 360^0), то MP будетъ отрицательнымъ (§ 3), а OP—положительнымъ; абсолютная же величина MP уменьшается, а OP увеличивается. Слѣдовательно, тангенсы въ четвертой четверти будутъ отрицательные; абсолютная же величина ихъ уменьшается по мѣрѣ

*) Если радіусъ OM будемъ двигать во второй четверти отъ OC къ OB, то тангенсъ будетъ отрицательнымъ и абсолютная величина его будетъ увеличиваться; когда же OM совпадетъ съ OB, то $\operatorname{tg}90^0$ будетъ равенъ $-\infty$. Поэтому $\operatorname{tg}90^0$ будетъ равенъ $\pm\infty$.

увеличенія угла. Когда же OM совпадетъ съ OA, то уголъ $AOM = 360^0$, $MP = 0$, $OP = OA$ и

$$\operatorname{tg} 360^0 = \frac{-0}{OA} = 0.$$

Относительно измѣненія тангенса при дальнѣйшемъ движеніи OM можемъ сказать то же, что сказали и о синусѣ; можемъ также написать, что

$$\operatorname{tg}(\alpha + 4nd) = \operatorname{tg}(\alpha + 2n \cdot 180^0) = \operatorname{tg}\alpha \text{ и } \operatorname{tg}(\vartheta + 2n\pi) = \operatorname{tg}\vartheta,$$

гдѣ n цѣлое, положительное или отрицательное число.

Изъ предъидущихъ изслѣдованій видимъ, что тангенсы для угловъ первой и третьей четвертей будутъ положительные, а для угловъ второй и четвертой будутъ отрицательные и что величины тангенсовъ измѣняются отъ $+\infty$ до $-\infty$.

§ 25. *Измѣненія котангенса* (фиг. 16). По опредѣленію (§ 16):

$$\operatorname{ctg} AOM = \frac{OP}{MP}.$$

Когда OM совпадаетъ съ OA, то уголъ $AOM = 0^0$, $OP = OA$, $MP = 0$ и слѣдовательно

$$\operatorname{ctg} 0^0 = \frac{OA}{0} = \infty.$$

Когда OM двигается въ первой четверти (отъ 0^0 до 90^0), то OP уменьшается, а MP увеличивается и оба будутъ положительными; слѣдовательно котангенсы въ первой четверти положительные и уменьшаются съ увеличеніемъ угла. При совпаденіи же OM съ OB, $MP = OB$, $OP = 0$ и уголъ $AOM = 90^0$; поэтому

$$\operatorname{ctg} 90^0 = \frac{0}{OB} = 0.$$

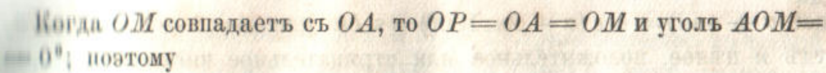
Продолжая изслѣдованіе, увидимъ, что для угловъ второй четверти котангенсы будутъ отрицательные и $\operatorname{ctg} 180^0 = -\infty$; для угловъ третьей четверти котангенсы будутъ положительные и $\operatorname{ctg} 270^0 = 0$; для угловъ четвертой четверти котангенсы отрицательные и $\operatorname{ctg} 360^0 = -\infty$. Также найдемъ, что

$$\operatorname{ctg}(\alpha + 4nd) = \operatorname{ctg}(\alpha + 2n \cdot 180^0) = \operatorname{ctg}\alpha \text{ и } \operatorname{ctg}(\vartheta + 2n\pi) = \operatorname{ctg}\vartheta,$$

гдѣ n цѣлое, положительное или отрицательное число.

§ 26. *Измѣненія секанса* (фиг. 15). Изъ чертежа имѣемъ (§ 16):

$$\sec AOM = \frac{OM}{OP}.$$



Когда OM совпадаетъ съ OA, то $OP = OA = OM$ и уголъ $AOM = 0^0$; поэтому

$$\sec 0^0 = \frac{OM}{OM} = 1.$$

Въ первой четверти (отъ 0^0 до 90) OP положительное (§ 4) и уменьшается по мѣрѣ движенія OM отъ OA къ OB, т. е. съ увеличеніемъ угла AOM; слѣдовательно, секансы для угловъ между 0^0 и 90^0 увеличиваются съ увеличеніемъ угла; когда же OM совпадетъ съ OB, то $OP = 0$, уголъ $AOM = 90^0$ и

$$\sec 90^0 = \frac{OB}{0} = \infty.$$

Прямая OM, двигаясь во второй четверти (отъ 90^0 до 180^0), будетъ приближаться къ OC; OP здѣсь отрицательное (§ 3), хотя абсолютная величина его будетъ возрастать по мѣрѣ увеличенія угла; слѣд. секансъ будетъ отрицательнымъ и абсолютная величина его будетъ уменьшаться съ увеличеніемъ угла отъ 90^0 до 180^0. Когда OM совпадетъ съ OC, то $OP = OC = OM$, уголъ $AOM = 180^0$ и

$$\sec 180^0 = \frac{OM}{-OM} = -1.$$

Когда OM двигается въ третьей четверти (отъ 180^0 до 270^0), то OP будетъ отрицательнымъ (§ 3) и абсолютная величина его уменьшается съ увеличеніемъ угла; слѣдовательно, секансы для угловъ этой четверти будутъ отрицательными и абсолютная величина ихъ будетъ увеличиваться съ увеличеніемъ угла; когда OM совпадетъ съ OD, то уголъ $AOM = 270^0$, $OP = 0$ и

$$\sec 270^0 = \frac{OM}{-0} = -\infty.$$

Наконецъ, для угловъ четвертой четверти секансы будутъ положительными и будутъ уменьшаться по мѣрѣ приближенія OM къ OA; когда же OM совпадетъ съ OA, то уголъ $AOM = 360^0$, $OP = OA = OM$ и слѣдовательно

$$\sec 360^0 = \frac{OM}{OM} = 1.$$

Продолжая OM двигать далѣе, въ томъ же направленіи и въ той же плоскости, увидимъ, что секансы будутъ измѣняться также, какъ и при первомъ вращеніи OM, и потому, означивъ уголъ буквою α, а его круговую мѣру буквою ϑ, получимъ:

$\sec(\alpha + 4nd) = \sec(\alpha + 2n.180^0) = \sec\alpha$ или $\sec(\vartheta + 2n\pi) = \sec\vartheta$, гдѣ n цѣлое, положительное или отрицательное число.

§ 27. *Измѣненія косеканса* (фиг. 15). Поступая также, какъ и въ предъидущемъ случаѣ, увидимъ, что косекансы для угловъ первой и второй четверти будутъ положительными, а для угловъ третьей и четвертой четвертей — отрицательными и что $\operatorname{cosec} 0^0 = \infty$, $\operatorname{cosec} 90^0 = 1$, $\operatorname{cosec} 180^0 = \infty$, $\operatorname{cosec} 270^0 = -1$, $\operatorname{cosec} 360^0 = -\infty$ и $\operatorname{cosec}(\alpha + 4nd) = \operatorname{cosec}(\alpha + 2n.180^0) = \operatorname{cosec}\alpha$ или $\operatorname{cosec}(\vartheta + 2n\pi) = \operatorname{cosec}\vartheta$, гдѣ n цѣлое, положительное или отрицательное число.

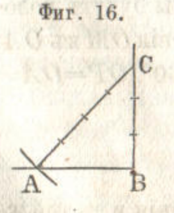
§ 28. Всѣ предъидущіе результаты соединимъ вмѣстѣ и получимъ таблицу:

Тригоном. величины.	Въ 1-й четвер. 0⁰. 90⁰.	Во 2-й четвер. 90⁰. 180⁰.	Въ 3-й четвер. 180⁰. 270⁰.	Въ 4-й четвер. 270⁰. 360⁰.
sin	0 (+) 1	1 (+) 0	0 (—) —1	—1 (—) 0
cos	1 (+) 0	0 (—) —1	—1 (—) 0	0 (+) 1
tg	0 (+) ∞	∞ (—) 0	0 (+) ∞	—∞ (—) 0
ctg	∞ (+) 0	0 (—) ∞	∞ (+) 0	0 (—) —∞
sec	1 (+) ∞	∞ (—) —1	—1 (—) —∞	∞ (+) 1
cosec	∞ (+) 1	1 (+) ∞	—∞ (—) —1	—1 (—) —∞

§ 29. На основаніи предъидущихъ изслѣдованій измѣненія тригонометрическихъ величинъ при измѣненіи угла, легко построить уголъ, когда дана его тригонометрическая величина.

Примѣръ I. Построить наименьшій изъ угловъ, котораго синусъ равенъ $^3/_4$. Намъ извѣстно (§ 16), что синусъ угла есть отношеніе перпендикуляра къ наклонной и что синусы будутъ положительными для угловъ первой четверти; поэтому, принявъ какую либо длину за единицу мѣры, построимъ прямоугольный треугольникъ ABC, въ которомъ катетъ BC равенъ 3 единицамъ длины, а гипотенуза AC равна 4 такимъ же единицамъ; тогда уголъ A, противолежащій катету BC будетъ искомый.

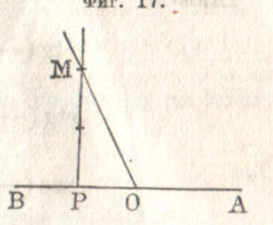
Фиг. 16.



Примѣръ II. Построить наименьшій изъ угловъ, котораго тангенсъ равенъ — 2. Тангенсъ угла (§ 16) есть отношеніе перпенди-

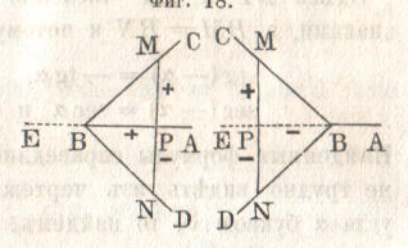
кулира къ проекціи наклонной и будетъ отрицательнымъ во второй четверти. Поэтому, принявъ какую либо опредѣленную прямую за единицу мѣры длины, отложимъ на произвольной прямой AB часть OP, равную единицѣ мѣры длины, и изъ точки P возставимъ перпендикуляръ, на кот. отложимъ отъ точки P часть PM, равную 2 такимъ единицамъ. Соединивъ точку O съ M, получимъ искомый уголъ AOM.

Фиг. 17.



§ 30. Опредѣленіе тригонометрическихъ величинъ для отрицательнаго угла. Пусть данъ уголъ $ABC=\alpha$. Внизъ отъ прямой AB построимъ уголъ ABD, равный углу ABC; тогда уголъ ABD, имѣя положеніе обратное относительно угла ABC, выразится (§ 6) числомъ $-\alpha$. Чтобы вывести зависимость между тригонометрическими величинами угловъ α и $-\alpha$, возьмемъ на прямой BD произвольную точку N и опустимъ перпендикуляръ NP на AB или ея продолженіе; перпендикуляръ NP продолжимъ до встрѣчи съ прямою BC въ точкѣ M. Прямоугольные треугольники BPM и BPN будутъ равны, потому что въ нихъ катетъ BP есть общій, а $\angle NBP=\angle MBP$, по отложенію; отсюда слѣдуетъ, что $NP=MP$ и $BN=BM$. По опредѣленію (§ 16):

Фиг. 18.



$$\sin(-\alpha)=\frac{NP}{BN}, \text{ а } \sin\alpha=\frac{MP}{BM};$$

здѣсь $BM=BN$, а NP и MP численно равны, но съ противоположными знаками, и потому

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha,$$

т. е. *синусъ даннаго отрицательнаго угла равенъ отрицат. синусу положительнаго угла, имѣющаго ту же абсолютную величину.*

Точно также

$$\cos(-\alpha)=\frac{BP}{BN} \text{ и } \cos\alpha=\frac{BP}{BM};$$

но $BN=BM$ и потому

$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha;$$

слѣдов. *косинусъ отрицательнаго угла равенъ косинусу положительнаго угла, имѣющаго ту же абсолютную величину.*

Также

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{NP}{BP}, \text{ а } \operatorname{tg}\alpha = \frac{MP}{BP};$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = \frac{BP}{NP}, \text{ а } \operatorname{ctg}\alpha = \frac{BP}{MP};$$

$$\sec(-\alpha) = \frac{BN}{BP}, \text{ а } \sec\alpha = \frac{BM}{BP};$$

$$\operatorname{cosec}(-\alpha) = \frac{BN}{NP}, \text{ а } \operatorname{cosec}\alpha = \frac{BM}{MP}.$$

Здѣсь NP и MP численно равны, но съ противоположными знаками, а $BM = BN$ и потому

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha, \quad \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha,$$
$$\sec(-\alpha) = \sec\alpha \text{ и } \operatorname{cosec}(-\alpha) = -\operatorname{cosec}\alpha.$$

Найденныя формулы справедливы для всѣхъ значеній угла α, что не трудно видѣть изъ чертежа. Если означимъ круговую мѣру угла α буквою ϑ, то найдемъ:

$$\sin(-\vartheta) = -\sin\vartheta, \ \cos(-\vartheta) = \cos\vartheta, \quad \operatorname{tg}(-\vartheta) = -\operatorname{tg}\vartheta,$$
$$\operatorname{ctg}(-\vartheta) = -\operatorname{ctg}\vartheta, \ \sec(-\vartheta) = \sec\vartheta \text{ и } \operatorname{cosec}(-\vartheta) = -\operatorname{cosec}\vartheta.$$

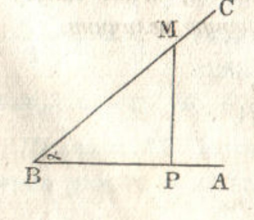
Примѣръ I. Найти $\cos(-45^0)$. Извѣстно, что $\cos 45^0 = \sqrt{1/2}$ и потому $\cos(-45^0) = \sqrt{1/2}$.

Примѣръ II. Опредѣлить $\sin - 270^0$. Въ § 22 нашли, что $\sin 270^0 = -1$, а потому $\sin - 270^0 = 1$.

Примѣръ III. Найти $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$. Получимъ: $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$ $= -\operatorname{tg} 45^0$ (§ 19) $= -1$.

§ 31. Отношенія между тригонометрическими величинами для одного и того же угла. Возьмемъ какой нибудь уголъ ABC и означимъ его буквою α; изъ точки M, взятой на BC, опустимъ перпендикуляръ MP на сторону AB. Имѣемъ (§ 16):

Фиг. 19.



$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{MP}{BP};$$

раздѣливъ числителя и знаменателя этой дроби на BM, получимъ:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{MP : BM}{BP : BM};$$

но $MP : BM = \sin\alpha$, $BP : BM = \cos\alpha$ и потому

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \qquad (1)$$

т. е. *тангенсъ угла равенъ синусу этого угла, дѣленному на косинусъ того же угла.*

Также

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{MP}{BP} = \frac{MP : MP}{BP : MP} \text{ или } \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha} \qquad (2)$$

и слѣдов. *тангенсъ угла равняется единицѣ, дѣленной на котангенсъ того же угла;* отсюда обратно

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}, \qquad (3)$$

т. е. *котангесъ угла равенъ единицѣ, дѣленной на тангенсъ того же угла.*

Имѣемъ:

$$\sec\alpha = \frac{BM}{BP} = \frac{BM : BM}{BP : BM} \text{ или } \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \qquad (5)$$

и

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{BM}{MP} = \frac{BM : BM}{MP : BM} \text{ или } \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}, \qquad (6)$$

т. е. *секансъ угла равенъ единицѣ, дѣленной на косинусъ того же угла,* а *косекансъ угла равенъ единицѣ, дѣленной на синусъ того же угла.*

Изъ прямоугольнаго треугольника BMP имѣемъ:

$$MP^2 + BP^2 = BM^2$$

или, раздѣливъ всѣ члены этого равенства на BM^2, найдемъ:

$$\left(\frac{MP}{BM}\right)^2 + \left(\frac{BP}{BM}\right)^2 = 1 \text{ или } \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \qquad (7)$$

т. е. *квадратъ синуса сложеннаго съ квадратомъ косинуса того же угла равенъ единицѣ.*

Изъ (7) формулы выходитъ, что

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \text{ или } \sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$$

и

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha \text{ или } \cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha},$$

гдѣ знакъ $+$ или $-$ передъ корнемъ ставимъ, смотря потому какой четверти принадлежитъ уголъ α (§§ 22 и 23).

tg x + ctg x = X

Раздѣливъ всѣ члены равенства: $MP^2 + BP^2 = BM^2$ на BP^2, получимъ:

$$\left(\frac{MP}{BP}\right)^2 + 1 = \left(\frac{BM}{BP}\right)^2 \text{ или } 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha, \qquad (8)$$

т. е. *квадратъ секанса угла равенъ 1 сложенной съ квадратомъ тангенса того же угла.*

Наконецъ, раздѣливши всѣ члены равенства: $MP^2 + BP^2 = BM^2$ на MP^2, найдемъ:

$$1 + \left(\frac{BP}{MP}\right)^2 = \left(\frac{BM}{MP}\right)^2 \text{ или } 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \operatorname{cosec}^2\alpha; \qquad (9)$$

слѣд. *квадратъ косеканса угла равенъ единицѣ, сложенной съ квадратомъ котангенса того же угла.*

§ 32. Полученныя девять формулъ вмѣстѣ съ равенствами $\operatorname{vers}\alpha = 1 - \cos\alpha$ и $\operatorname{covers}\alpha = 1 - \sin\alpha$ даютъ возможность опредѣлить всѣ тригонометрическія величины для какого-либо угла, когда извѣстна одна изъ нихъ.

Примѣръ I. Опредѣлить тригонометрическія величины для угла α по $\sin\alpha$.

Найдемъ:

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2\alpha}; \ \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \pm\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha}};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \pm\frac{\sqrt{1 - \sin^2\alpha}}{\sin\alpha}; \ \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \pm\frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha}};$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}; \ \operatorname{vers}\alpha = 1 - \cos\alpha = 1 \mp \sqrt{1 - \sin^2\alpha} \text{ и } \operatorname{covers}\alpha = 1 - \sin\alpha.$$

Примѣръ II. Опредѣлить тригонометрическія величины для угла α по $\operatorname{tg}\alpha$.

Найдемъ:

$$\sin\alpha = \frac{1}{\operatorname{cosec}\alpha} = \pm\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha}} = 1 : \pm\sqrt{1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}} =$$

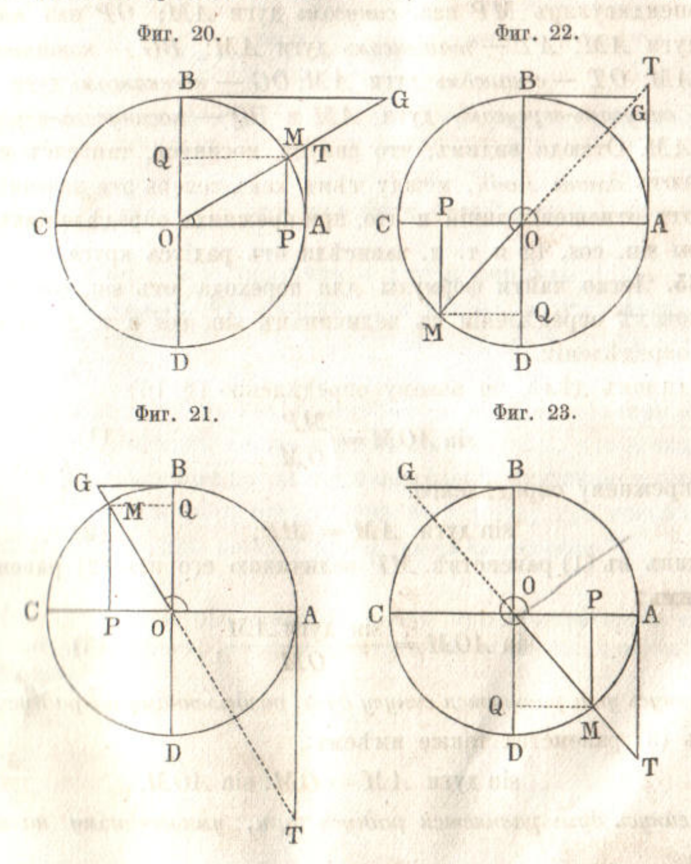
$$= 1 : \pm\frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}}{\operatorname{tg}\alpha} = \pm\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}};$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha} = \pm\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}}; \ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}; \ \sec\alpha = \pm\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}$$

и $$\operatorname{cosec}\alpha = \pm\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha} = \pm\sqrt{1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}} = \pm\frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

§ 33. Если уголъ α менѣе половины прямаго угла, то $\cos\alpha$ болѣе $\sin\alpha$. Пусть уголъ ABC (фиг. 19) менѣе 45^0; тогда въ прямоугольномъ треугольникѣ BMP: $\angle MBP + \angle BMP = 90^0$; но $\angle MBP < 45^0$, а потому $\angle BMP > 45^0$; слѣдовательно $BP > MP$ или $\frac{BP}{BM} > \frac{MP}{BM}$. Отношеніе $\frac{BP}{BM} = \cos\alpha$, а отношеніе $\frac{MP}{BM} = \sin\alpha$; поэтому $\cos\alpha > \sin\alpha$. Если же уголъ α заключается между 45^0 и 90^0, то легко показать, что $\cos\alpha < \sin\alpha$.

§ 34. Объ опредѣленіяхъ тригонометрическихъ величинъ. Опредѣленія тригонометрическихъ величинъ, данныя въ этомъ курсѣ, су-



щественно отличаются отъ опредѣленій, находящихся въ другихъ курсахъ тригонометріи. Въ этомъ параграфѣ мы познакомимъ чи-

тателя съ упомянутыми опредѣленіями тригонометрическихъ величинъ.

Опишемъ изъ точки O (фиг. 20, 21, 22 и 23) окружность произвольнымъ радіусомъ и проведемъ два взаимно-перпендикулярные діаметра AC и BD; отъ точки A отложимъ какую-либо дугу AM и чрезъ точки O и M проведемъ прямую. Изъ точки M опустимъ перпендикуляръ MP на AC и черезъ точку A проведемъ касательную къ кругу, до встрѣчи, съ прямою OM въ точкѣ T; также проведемъ касательную къ кругу чрезъ точку B до встрѣчи съ прямою OM въ точкѣ G.

Перпендикуляръ MP наз. *синусомъ* дуги AM; OP наз. *косинусомъ* дуги AM; AT — *тангенсомъ* дуги AM; BG — *котангенсомъ* дуги AM; OT — *секансомъ* дуги AM; OG — *косекансомъ* дуги AM; AP — *синусомъ-версусомъ* дуги AM и BQ — *косинусомъ-версусомъ* дуги AM. Отсюда видимъ, что синусъ, косинусъ, тангенсъ и т. д. означаютъ *длины линій*, между тѣмъ какъ теперь эти названія выражаютъ отношенія линій и что, при прежнихъ опредѣленіяхъ, величины sin, cos, tg и т. д. зависѣли отъ радіуса круга.

§ 35. Легко найти формулы для перехода отъ sin, cos и т. д. при новомъ опредѣленіи къ величинамъ sin, cos и т. д. при старомъ опредѣленіи.

Въ самомъ дѣлѣ, по новому опредѣленію (§ 16):

$$\sin AOM = \frac{MP}{OM}, \qquad (1),$$

а по прежнему опредѣленію:

$$\sin \text{дуги } AM = MP; \qquad (2)$$

замѣнивъ въ (1) равенствѣ MP величиною его изъ (2) равенства, получимъ:

$$\sin AOM = \frac{\sin \text{дуги } AM}{OM}, \qquad (3)$$

т. е. *синусъ угла равняется синусу дуги, раздѣленному на радіусъ дуги.*

Изъ (3) равенства также имѣемъ:

$$\sin \text{дуги } AM = OM \, . \, \sin AOM,$$

т. е. *синусъ дуги равняется радіусу дуги, умноженному на синусъ угла.*

Такіе же результаты получатся и для всѣхъ другихъ тригонометрическихъ величинъ.

§ 36. Въ слѣдствіе найденныхъ отношеній между sin, cos, tg и т. д., опредѣленныхъ по новой и прежней системѣ, легко перейти отъ формулъ, выведенныхъ по новому опредѣленію тригонометрическихъ величинъ, къ формуламъ, гдѣ тригонометрическія величины опредѣляются по прежнему, и обратно. Напр. въ § 31 было найдено, что

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$

гдѣ α означаетъ какой-либо уголъ.

Если означимъ буквою a дугу, соотвѣтствующую углу α и описанную радіусомъ r, то (§ 35)

$$\sin\alpha = \frac{\sin a}{r} \text{ и } \cos\alpha = \frac{\cos a}{r};$$

подставивъ эти величины $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ въ предъидущее равенство, найдемъ:

$$\frac{\sin^2 a}{r^2} + \frac{\cos^2 a}{r^2} = 1 \text{ или } \sin^2 a + \cos^2 a = r^2.$$

Точно также можно получить и другія формулы § 31.

§ 37. Мы нашли, что синусъ дуги равенъ радіусу дуги, умноженному на синусъ угла, соотвѣтствующаго дугѣ; слѣдовательно, если *радіусъ дуги примемъ за единицу,* то численныя величины синуса, а равно и другихъ тригонометрическихъ величинъ, будутъ одинаковы въ обѣихъ системахъ; отсюда видимъ, что всякая формула, выведенная при прежнемъ опредѣленіи тригонометрическихъ величинъ, можетъ быть превращена въ формулу при новыхъ опредѣленіяхъ, положивъ *радіусъ круга равнымъ единицѣ* *).

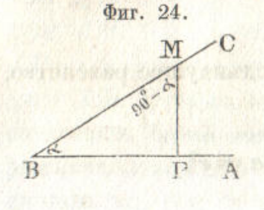
*) *Ретикусъ* (Rheticus), составившій полную тригонометрическую таблицу, упоминаетъ уже о томъ, что тригонометрическія величины суть собственно отношенія линій.

ОТДѢЛЪ II.

Опредѣленіе тригонометрическихъ величинъ для угловъ: $90^0-\alpha$, $90^0+\alpha$, $180^0-\alpha$, $180^0+\alpha$, $270^0-\alpha$, $270^0+\alpha$ и $360^0-\alpha$ по тригонометрическимъ величинамъ для угла α. — Опредѣленіе общаго выраженія для угловъ, имѣющихъ одинъ и тотъ же синусъ, косинусъ и т. д.

§ 38. Опредѣленіе тригонометрическихъ величинъ для угла $90^0-\alpha$ по тригонометрическимъ величинамъ для остраго угла α. Начертимъ уголъ $ABC=\alpha$ и изъ какой нибудь точки M, взятой на сторонѣ BC, опустимъ перпендикуляръ MP на AB; тогда уголъ BMP будетъ дополнительный углу α. На основаніи опредѣленій тригонометрическихъ величинъ (§ 16), найдемъ для угла α:

Фиг. 24.



$$\sin\alpha=\frac{MP}{BM},\ \cos\alpha=\frac{BP}{BM},\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{MP}{BP},$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{BP}{MP},\ \sec\alpha=\frac{BM}{BP}\text{ и }\operatorname{cosec}\alpha=\frac{BM}{MP};$$

для угла же $AMP=90^0-\alpha$ имѣемъ:

$$\sin(90^0-\alpha)=\frac{BP}{BM},\ \cos(90^0-\alpha)=\frac{MP}{BM},\ \operatorname{tg}(90^0-\alpha)=\frac{BP}{MP},$$

$$\operatorname{ctg}(90^0-\alpha)=\frac{MP}{BP},\ \sec(90^0-\alpha)=\frac{BM}{MP}\text{ и }\operatorname{cosec}(90^0-\alpha)=\frac{BM}{BP}.$$

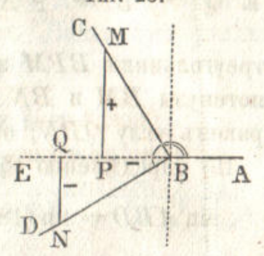
Изъ сравненія написанныхъ отношеній, получимъ:

$\sin\alpha=\cos(90^0-\alpha)$; $\cos\alpha=\sin(90^0-\alpha)$; $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{ctg}(90^0-\alpha)$; $\operatorname{ctg}\alpha=\operatorname{tg}(90^0-\alpha)$; $\sec\alpha=\operatorname{cosec}(90^0-\alpha)$ и $\operatorname{cosec}\alpha=\sec(90^0-\alpha)$, *т. е. синусъ даннаго угла равняется косинусу угла ему дополнительнаго; косинусъ даннаго угла равняется синусу угла ему дополнительнаго; тангенсъ даннаго угла равняется котангенсу угла ему дополнительнаго; котангенсъ даннаго угла равняется тангенсу угла ему дополнительнаго; секансъ даннаго угла равняется косекансу угла ему дополнительнаго и косекансъ даннаго угла равняется секансу угла ему дополнительнаго.* Напр. $\sin 16^0 18'=\cos 73^0 42'$; $\operatorname{ctg} 59^0 4' 36''=\operatorname{tg} 30^0 55' 24''$;

$\sin 30^0 = \cos 60^0$ (§ 20) $= {}^1/_2$; $\cos 30^0 = \sin 60^0$ (§ 20) $= \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\operatorname{tg} 30^0 =$ $= \operatorname{ctg} 60^0$ (§ 20) $= \sqrt{{}^1/_3}$.

§ 39. Опредѣленіе тригонометрическихъ величинъ для угла $90^0+\alpha$ по тригонометрическимъ величинамъ угла α. Возьмемъ уголъ ABC и изъ точки B возставимъ перпендикуляръ BD къ BC; тогда получимъ уголъ ABD, и если уголъ ABC означимъ буквою α, то уголъ ABD, считаемый въ ту же сторону, будетъ $90^0+\alpha$. На сторонахъ BC и BD отложимъ равныя части: BM и BN и изъ точекъ M и N опустимъ перпендикуляры MP и NQ на сторону AB или ее продолженіе. Прямоугольные треугольники BPM и BQN будутъ равны, потому что гипотенузы BM и BN равны, по отложенію, а острые углы MBP и BNQ равны, какъ съ перпендикулярными сторонами; отсюда видимъ, что $BP = NQ$ и $MP = BQ$. По опредѣленію (§ 16):

Фиг. 25.



$$\sin ABD = \sin(90^0+\alpha) = \frac{NQ}{BN} \text{ и } \cos ABC = \cos\alpha = \frac{BP}{BM};$$

но $BM = BN$, а NQ и BP численно равны и съ одинаковыми знаками; поэтому

$$\sin(90^0+\alpha) = \cos\alpha.$$

Также

$$\cos ABD = \cos(90^0+\alpha) = \frac{BQ}{BN} \text{ и } \sin ABC = \sin\alpha = \frac{MP}{BM};$$

но BQ и MP численно равны и съ обратными знаками, а $BN = BM$ и потому

$$\cos(90^0+\alpha) = -\sin\alpha.$$

Теперь

$$\operatorname{tg}(90^0+\alpha) = \frac{\sin(90^0+\alpha)}{\cos(90^0+\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\operatorname{ctg}\alpha;$$

$$\operatorname{ctg}(90^0+\alpha) = \frac{\cos(90^0+\alpha)}{\sin(90^0+\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha;$$

$$\sec(90^0+\alpha) = -\operatorname{cosec}\alpha \text{ и } \operatorname{cosec}(90^0+\alpha) = \sec\alpha.$$

Примѣръ. Найти $\operatorname{ctg} {}^2/_3\pi$. Получимъ $\operatorname{ctg} {}^2/_3\pi = \operatorname{ctg} 120^0 = -\operatorname{tg} 30^0$ (§ 38) $= -\sqrt{{}^1/_3}$.

§ 40. Опредѣленіе тригонометрическихъ величинъ для угла $180^0 - \alpha$ по тригонометрическимъ величинамъ для угла α. Возьмемъ уголъ $ABC = \alpha$ и, продолживъ линію AB, отложимъ уголъ EBD, равный углу ABC; тогда уголъ $ABD = 180^0 - \alpha$. На сторонахъ BC и BD отложимъ равныя части BM и BN и изъ точекъ M и N опустимъ перпендикуляры MP и NQ на прямую AE; полученные треугольники BPM и BQN будутъ равны, потому что у нихъ гипотенузы BM и BN равны, по отложенію, и также уголъ PBM равенъ углу QBN; отсюда видимъ, что $BP = BQ$ и $MP = NQ$.

Фиг. 26.

D N M C + + E Q − B + P A

По опредѣленію (§ 16), имѣемъ:

$$\sin ABD = \sin(180^0 - \alpha) = \frac{NQ}{BN} \text{ и } \sin ABC = \sin\alpha = \frac{MP}{BM};$$

здѣсь MP и NQ равны по величинѣ и имѣютъ одинакіе знаки, а потому

$$\sin(180^0 - \alpha) = \sin\alpha,$$

т. е. *синусъ даннаго угла равенъ синусу угла ему дополнительнаго до двухъ прямыхъ.*

Также

$$\cos ABD = \cos(180^0 - \alpha) = \frac{BQ}{BN} \text{ и } \cos ABC = \cos\alpha = \frac{BP}{BM};$$

но BP и BQ равны и имѣютъ противные знаки, а потому

$$\cos(180^0 - \alpha) = -\cos\alpha,$$

т. е. *косинусъ даннаго угла равенъ минусъ косинусу угла дополнительнаго ему до двухъ прямыхъ.*

Также

$$\operatorname{tg}(180^0 - \alpha) = \frac{\sin(180^0 - \alpha)}{\cos(180^0 - \alpha)} = \frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha,$$

т. е. *тангенсъ даннаго угла равенъ минусъ тангенсу угла дополнительнаго ему до двухъ прямыхъ.*

Также

$$\operatorname{ctg}(180^0 - \alpha) = \frac{\cos(180^0 - \alpha)}{\sin(180^0 - \alpha)} = \frac{-\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\operatorname{ctg}\alpha;$$

$$\sec(180^0 - \alpha) = \frac{1}{\cos(180^0 - \alpha)} = \frac{1}{-\cos\alpha} = -\sec\alpha$$

и $$\operatorname{cosec}(180^0 - \alpha) = \frac{1}{\sin(180^0 - \alpha)} = \frac{1}{\sin\alpha} = \operatorname{cosec}\alpha.$$

На основаніи § 22 можемъ написать, что

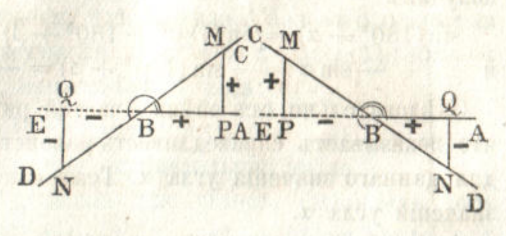
$$\sin[(2n+1)180^0-\alpha]=\sin\alpha.$$

Примѣръ I. Опредѣлить $\operatorname{tg} 120^0$; получимъ: $\operatorname{tg} 120^0 = \operatorname{tg} 60^0$ (§ 20) $= -\sqrt{3}$.

Примѣръ II. Опредѣлить $\cos {}^5/_6\,\pi$; получимъ: $\cos {}^5/_6\,\pi = -\cos {}^1/_6\,\pi$ (§ 38) $= -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

§ 41. Опредѣленіе тригонометрическихъ величинъ для угла $180^0+\alpha$ по тригонометрическимъ величинамъ для угла α. Начертимъ уголъ $ABC=\alpha$ и продолжимъ сторону CB; тогда найдемъ уголъ $ABD=180^0+ABC=180^0+\alpha$. На сторонахъ BC и BD отложимъ равныя части BM и BN и изъ точекъ M и N опустимъ перпендикуляры MP и NQ на прямую AE; полученные треугольники BPM и BQN будутъ равны во всѣхъ сходственныхъ частяхъ. По опредѣленію (§ 16), имѣемъ:

Фиг. 27.



$$\sin ABD=\sin(180^0+\alpha)=\frac{NQ}{BN} \text{ и } \sin ABC=\sin\alpha=\frac{MP}{BM};$$

NQ и MP численно равны, но съ противными знаками, а $BM=BN$; поэтому

$$\sin(180^0+\alpha)=-\sin\alpha.$$

Также

$$\cos ABD=\cos(180^0+\alpha)=\frac{BQ}{BN} \text{ и } \cos ABC=\cos\alpha=\frac{BP}{BM};$$

BP и BQ численно равны и имѣютъ положеніе обратное, а потому

$$\cos(180^0+\alpha)=-\cos\alpha.$$

Также

$$\operatorname{tg}(180^0+\alpha)=\frac{\sin(180^0+\alpha)}{\cos(180^0+\alpha)}=\frac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha;$$

$$\operatorname{ctg}(180^0+\alpha)=\frac{\cos(180^0+\alpha)}{\sin(180^0+\alpha)}=\frac{-\cos\alpha}{-\sin\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha;$$

$$\sec(180^0+\alpha)=\frac{1}{\cos(180^0+\alpha)}=\frac{1}{-\cos\alpha}=-\sec\alpha$$

и $$\operatorname{cosec}(180^0+\alpha)=\frac{1}{\sin(180^0+\alpha)}=\frac{1}{-\sin\alpha}=-\operatorname{cosec}\alpha.$$

§ 42. Найденныя формулы справедливы для всѣхъ значеній угла α, что видно непосредственно изъ чертежа. Но впрочемъ эти формулы, также какъ и формулы §§ 38, 39 и 40, можно повѣрить, давая углу α частныя значенія; такъ напр., если желаемъ показать, что равенство

$$\sin(180^0+\alpha)=-\sin\alpha.$$

справедливо для $\alpha=180^0+\beta$, гдѣ $\beta<90^0$ и >0, то для этого подставимъ отдѣльно въ обѣ части равенства $180^0+\beta$ вмѣсто α и получимъ:

$$\sin(180^0+\alpha)=\sin(180^0+180^0+\beta)=\sin(360^0+\beta)=\sin\beta$$

и $$-\sin\alpha=-\sin(180^0+\beta)=-(-\sin\beta)=\sin\beta.$$

Слѣдовательно, отъ обѣихъ частей равенства получили по $\sin\beta$, что показываетъ справедливость равенства: $\sin(180^0+\alpha)=-\sin\alpha$ для даннаго значенія угла α. Тоже самое получимъ и для другихъ значеній угла α.

Примѣръ I. Опредѣлить $\sin 225^0$; получимъ: $\sin 225^0=-\sin 45^0$ (§ 19) $=-\sqrt{1/_2}$.

Примѣръ II. Опредѣлить $\cos {}^4/_3\pi$; получимъ: $\cos {}^4/_3\pi=-\cos {}^1/_3\pi=$ $=-\cos 60^0$ (§ 20) $=-{}^1/_2$.

§ 43. Опредѣленіе тригонометрическихъ величинъ для угла $270^0\pm\alpha$ по тригонометрическимъ величинамъ для угла α.

Замѣтивъ, что $270^0=180^0+90^0$, получимъ:

$\sin(270^0-\alpha)=\sin[180^0+(90^0-\alpha)]$ (§ 41) $=-\sin(90^0-\alpha)=$ $=-\cos\alpha$.

Также найдемъ, что

$\cos(270^0-\alpha)=-\sin\alpha$, $\sin(270^0+\alpha)=-\cos\alpha$, $\cos(270^0+\alpha)=$ $=\sin\alpha$, $\operatorname{tg}(270^0\pm\alpha)=\mp\operatorname{ctg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}(270^0\pm\alpha)=\mp\operatorname{tg}\alpha$.

Эти формулы можно найти прямо изъ чертежа подобно тому, какъ дѣлали въ §§ 38—41.

Примѣръ. Опред. $\sin 300^0$; получимъ: $\sin 300^0=-\cos 30^0=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

§ 44. Опредѣленіе тригонометрическихъ величинъ для угла $360^0-\alpha$ по тригонометрическимъ величинамъ для угла α. Зная, что уменьшивъ или увеличивъ уголъ на 360^0, тригонометрическія величины угловъ не мѣняются, получимъ (§ 30):

$\sin(360^0-\alpha)=\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$; $\cos(360^0-\alpha)=\cos(-\alpha)=\cos\alpha$; $\operatorname{tg}(360^0-\alpha)=\operatorname{tg}(-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$; $\operatorname{ctg}(360^0-\alpha)=\operatorname{ctg}(-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha$ и т. д.

§ 45. Опредѣленіе общаго выраженія для угловъ, имѣющихъ одинъ и тотъ же синусъ, косинусъ и т. д. Мы представимъ здѣсь подробности общаго выраженія только для угловъ, имѣющихъ тотъ же синусъ, а для остальныхъ тригонометрическихъ величинъ дадимъ окончательные выводы, такъ какъ ходъ разсужденій для нихъ всѣхъ будетъ одинъ и тотъ же. Пусть α будетъ одинъ изъ угловъ, которыхъ данъ синусъ; тогда (§ 22) тотъ же самый синусъ будутъ имѣть углы, равные $2n \,.\, 180^0 + \alpha$, гдѣ n цѣлое, положительное или отрицательное число; этотъ же самый синусъ (§ 40) будутъ имѣть углы, равные $(2n+1)180^0 - \alpha$, гдѣ n цѣлое, положительное или отрицательное число. Формулы $2n \,.\, 180^0 + \alpha$ и $(2n+1)\,180^0 - \alpha$ можно соединить въ одну, написавъ ихъ такъ:

$$n \,.\, 180^0 + (-1)^n \alpha,$$

гдѣ n цѣлое, положительное или отрицательное число.

Слѣдовательно, общее выраженіе для угловъ, имѣющихъ тотъ же синусъ, будетъ: $n \,.\, 180^0 + (-1)^n \alpha$, гдѣ n цѣлое число, а α данный уголъ.

Точно также, если означимъ буквою α одинъ изъ угловъ, имѣющихъ туже тригонометрическую величину, а чрезъ n какое либо цѣлое число, то получимъ общее выраженіе для угловъ, имѣющихъ тотъ же

1) косинусъ..... $2n \,.\, 180^0 \pm \alpha$; 2) тангенсъ... $n \,.\, 180^0 + \alpha$;
3) котангенсъ... $n \,.\, 180^0 + \alpha$; 4) секансъ....$2n \,.\, 180^0 \pm \alpha$ и
5) косекансъ..... $n \,.\, 180^0 + (-1)^n \alpha$.

Примѣръ I. $\operatorname{Cos} \alpha = \frac{1}{2}$. Найти общее выраженіе для угла α. Такъ какъ $\cos 60^0 = \frac{1}{2}$ (§ 20), то общее выраженіе для угла α есть $2n \,.\, 180^0 \pm 60^0$.

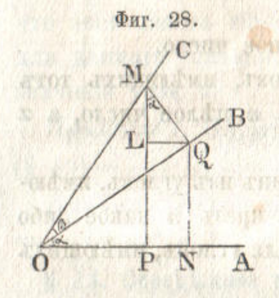
Примѣръ II. Найти общее выраженіе для угла α, когда $\operatorname{tg} \alpha = 1$. Искомое рѣшеніе: $\alpha = n \,.\, 180^0 + 45^0$.

ОТДѢЛЪ III.

Опредѣленіе тригонометрическихъ величинъ для суммы и разности двухъ и болѣе угловъ. — Опредѣленіе тригонометричестихъ величинъ для угловъ, кратныхъ данному. — Опредѣленіе тригонометрическихъ величинъ для угловъ, составляющихъ половину, четверть и т. д. даннаго угла. — Опредѣленіе косинуса и синуса трети угла, зная косинусъ и синусъ цѣлаго угла.

§ 46. Опредѣленіе синуса и косинуса суммы двухъ данныхъ угловъ въ зависимости отъ синуса и косинуса данныхъ угловъ. Означимъ уголъ AOB буквою α, а уголъ BOC буквою β; тогда уголъ $AOC = \alpha + \beta$.

Фиг. 28.



Возьмемъ на OC какую нибудь точку M и изъ нея опустимъ перпендикуляръ MP на OA и MQ на OB; изъ точки Q опустимъ перпендикуляръ QN на OA и QL на MP. Замѣтимъ также, что уголъ LMQ равенъ углу α, потому что стороны этихъ угловъ соотвѣтственно перпендикулярны и оба угла острые. По опредѣленію (§ 16):

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{MP}{OM} = \frac{PL+ML}{OM} = \frac{QN+ML}{OM} = \frac{QN}{OM} + \frac{ML}{OM};$$

въ первомъ отношеніи, QN и OM суть стороны прямоугольныхъ треугольниковъ ONQ и OMQ, у кот. общая сторона есть OQ, а потому числителя и знаменателя перваго отношенія умножимъ на OQ; во второмъ отношеніи, ML и OM суть стороны прямоугольныхъ треугольниковъ MLQ и OQM, у кот. общая сторона есть MQ, а потому числителя и знаменателя втораго отношенія умножимъ на MQ. Найдемъ:

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{QN}{OQ}\cdot\frac{OQ}{OM} + \frac{ML}{MQ}\cdot\frac{MQ}{OM};$$

но (§ 16) $\frac{QN}{OQ} = \sin\alpha$, $\frac{OQ}{OM} = \cos\beta$, $\frac{ML}{MQ} = \cos\alpha$, $\frac{MQ}{OM} = \sin\beta$ и потому

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta, \qquad (1)$$

т. е. *синусъ суммы двухъ угловъ равенъ суммѣ произведеній синуса перваго угла на косинусъ втораго и косинуса перваго на синусъ втораго угла.*

Также

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{OP}{OM}=\frac{ON-QL}{OM}=\frac{ON}{OM}-\frac{QL}{OM}=$$
$$=\frac{ON}{OQ}\cdot\frac{OQ}{OM}-\frac{QL}{MQ}\cdot\frac{MQ}{OM};$$

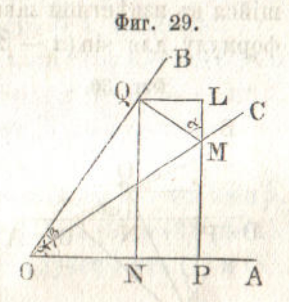
но (§ 16) $\frac{ON}{OQ}=\cos\alpha$, $\frac{OQ}{OM}=\cos\beta$, $\frac{QL}{MQ}=\sin\alpha$ и $\frac{MQ}{OM}=\sin\beta$, а потому

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta, \qquad (2)$$

т. е. *косинусъ суммы двухъ угловъ равенъ разности произведеній косинусовъ и синусовъ данныхъ угловъ.*

§ 47. Опредѣленіе синуса и косинуса разности двухъ угловъ по синусу и косинусу данныхъ угловъ. Означимъ уголъ AOB буквою α и уголъ BOC буквою β; тогда уголъ $AOC=\alpha-\beta$. Изъ какой нибудь точки M, взятой на OC, опустимъ перпендикуляръ MP на OA и MQ на OB; также опустимъ перпендикуляръ QN на OA и QL на продолженіе линіи PM. Углы QML и AOB будутъ равны, какъ съ перпендикулярными сторонами и при томъ оба угла острые. По опредѣленію (§ 16):

Фиг. 29.



$$\sin(\alpha-\beta)=\frac{MP}{OM}=\frac{PL-ML}{OM}=\frac{QN-ML}{OM}=\frac{QN}{OM}-\frac{ML}{OM}=$$
$$=\frac{QN}{OQ}\cdot\frac{OQ}{OM}-\frac{ML}{MQ}\cdot\frac{MQ}{OM};$$

но $\frac{QN}{OQ}=\sin\alpha$, $\frac{OQ}{OM}=\cos\beta$, $\frac{ML}{MQ}=\cos\alpha$ и $\frac{MQ}{OM}=\sin\beta$, а потому

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta, \qquad (3)$$

т. е. *синусъ разности двухъ угловъ равенъ разности произведеній синуса перваго угла на косинусъ втораго и косинуса перваго угла на синусъ втораго.*

Также

$$\cos(\alpha-\beta)=\frac{OP}{OM}=\frac{ON+QL}{OM}=\frac{ON}{OM}+\frac{QL}{OM}=$$
$$=\frac{ON}{OQ}\cdot\frac{OQ}{OM}+\frac{QL}{MQ}\cdot\frac{MQ}{OM};$$

но $\frac{ON}{OQ}=\cos\alpha$, $\frac{OQ}{OM}=\cos\beta$, $\frac{QL}{MQ}=\sin\alpha$ и $\frac{MQ}{OM}=\sin\beta$, а потому

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta, \qquad (4)$$

т. е. *косинусъ разности двухъ угловъ равенъ суммѣ произведеній косинусовъ и синусовъ данныхъ угловъ.*

§ 48. Найденныя (1), (2), (3) и (4) формулы справедливы для всѣхъ значеній угловъ α и β; въ этомъ можно убѣдиться, произведя, на самомъ дѣлѣ, выводъ предъидущихъ формулъ при другихъ значеніяхъ α и β; построеніе будетъ вездѣ одно и тоже, а при выводахъ придется иногда брать вмѣсто даннаго угла другой, находящійся въ извѣстной зависимости отъ даннаго. Для примѣра выведемъ формулу для $\sin(\alpha-\beta)$, гдѣ $90^0<\alpha<180^0$, а $0^0<\beta<90^0$.

Фиг. 30.

Пусть уголъ AOB будетъ α, а уголъ BOC будетъ β; тогда уголъ $AOC=\alpha+\beta$. Изъ какой нибудь точки M линіи OC опустимъ перпендикуляръ MP на продолженіи линіи OA и перпендикуляръ MQ на OB; изъ точки Q опустимъ перпендик. QN и QL на продолженіе линій AO и MP. Уголъ $QML=BOD=180^0-AOB=$ $=180^0-\alpha$.

По опредѣленію (§§ 22, 40):

$$-\sin(\alpha+\beta)=\frac{MP}{OM}=\frac{ML-QN}{OM}=\frac{ML}{OM}-\frac{QN}{OM}=$$
$$=\frac{ML}{MQ}\cdot\frac{MQ}{OM}-\frac{QN}{OQ}\cdot\frac{OQ}{OM};$$

но $\frac{ML}{MQ}=\cos QML=\cos(180^0-\alpha)=-\cos\alpha$, $\frac{MQ}{OM}=\sin\beta$,

$\frac{QN}{OQ}=\sin BOD=\sin(180^0-\alpha)=\sin\alpha$ и $\frac{OQ}{OM}=\cos\beta$;

слѣдовательно,

$$-\sin(\alpha+\beta) = -\cos\alpha . \sin\beta - \sin\alpha\cos\beta$$

или, перемѣнивъ во всѣхъ членахъ знаки на обратные, найдемъ:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$

одинаковую съ полученною въ § 46.

§ 49. Формулы §§ 46 и 47 справедливы и когда $\beta > \alpha$. Въ самомъ дѣлѣ, если $\beta > \alpha$, то (§ 30)

$$\sin(\alpha-\beta) = -\sin(\beta-\alpha) = -(\sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha)$$
$$= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta,$$

а $$\cos(\alpha-\beta) = \cos(\beta-\alpha) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

§ 50. Формулы §§ 46 и 47 справедливы и въ томъ случаѣ, когда одинъ изъ угловъ α и β или оба угла будутъ отрицательные. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что $\alpha = -a$ и $\beta = -b$ и повѣримъ одну изъ предъидущихъ формулъ, напр. формулу для $\sin(\alpha-\beta)$; поставимъ въ ней $-a$ вмѣсто α и $-b$ вмѣсто β и найдемъ:

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin(-a+b) = \sin(b-a) = \sin b\cos a - \cos b\sin a$$

но $a = -\alpha$, $b = -\beta$, а потому (§ 30) $\sin b = \sin(-\beta) = -\sin\beta$, $\cos a = \cos(-\alpha) = \cos\alpha$, $\cos b = \cos(-\beta) = \cos\beta$, $\sin a = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ и слѣдовательно,

$$\sin(\alpha-\beta) = -\sin\beta\cos\alpha - (\cos\beta . -\sin\alpha) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

Замѣчаніе. Сравнивая (§§ 46, 47) формулу (1) съ (3) и (2) съ (4), видимъ, что (2) и (4) формулы могутъ быть получены изъ (1) и (3), поставивъ въ нихъ $-\beta$ вмѣсто β.

Справедливость (1), (2), (3) и (4) формулъ (§§ 46, 47) для всѣхъ значеній α и β можно показать, не прибѣгая къ чертежу. Напримѣръ, если желаемъ повѣрить (1) формулу, когда $\alpha > 180^0$ и $< 270^0$, а $\beta > 90^0$ и $< 180^0$, то, положивъ $\alpha = 180^0 + a$, гдѣ $a < 90^0$ и $\beta = 180^0 - b$, гдѣ $b < 90^0$, найдемъ:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(180^0 + a + 180^0 - b) = \sin(360^0 + a - b)$$
$$= \sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b;$$

но такъ какъ $a = \alpha - 180^0$, $b = 180^0 - \beta$, то поэтому $\sin a = \sin(\alpha - 180^0) = -\sin(180^0 - \alpha) = -\sin\alpha$, $\cos b = \cos(180^0 - \beta) = -\cos\beta$, $\cos a = \cos(\alpha - 180^0) = \cos(180^0 - \alpha) = -\cos\alpha$ и $\sin b = \sin(180^0 - \beta) = \sin\beta$. Слѣдов. $\sin(\alpha+\beta) = (-\sin\alpha)(-\cos\beta) - (-\cos\alpha)\sin\beta = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$.

Примѣръ. Опредѣлить тригонометрическія величины для угловъ въ 75^0 и 15^0.

Имѣемъ:

$$\sin 75^0 = \sin(45^0 + 30^0) = \sin 45^0 \cos 30^0 + \cos 45^0 \sin 30^0$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}};$$
$$\cos 75^0 = \cos(45^0 + 30^0) = \cos 45^0 \cos 30^0 - \sin 45^0 \sin 30^0$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}};$$
$$\operatorname{tg} 75^0 = \frac{\sin 75^0}{\cos 75^0} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = 2+\sqrt{3};$$
$$\operatorname{ctg} 75^0 = \frac{1}{\operatorname{tg} 75^0} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = 2-\sqrt{3};$$
$$\sec 75^0 = \frac{1}{\cos 75^0} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{2}(\sqrt{3}+1);$$
$$\operatorname{cosec} 75^0 = \frac{1}{\sin 75^0} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1} = \sqrt{2}(\sqrt{3}-1);$$
$$\sin 15^0 = \cos 75^0 = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}};\ \cos 15^0 = \sin 75^0 = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}};$$
$$\operatorname{tg} 15^0 = \operatorname{ctg} 75^0 = 2-\sqrt{3};\ \operatorname{ctg} 15^0 = \operatorname{tg} 75^0 = 2+\sqrt{3};$$
$$\sec 15^0 = \sqrt{2}(\sqrt{3}-1) \text{ и } \operatorname{cosec} 15^0 = \sqrt{2}(\sqrt{3}+1).$$

§ 51. Опредѣленіе тангенса для суммы и разности двухъ угловъ. Извѣстно, что

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta};$$

раздѣливъ числителя и знаменателя дроби на $\cos\alpha\cos\beta$, получимъ:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1 - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}$$

или

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}, \qquad (5)$$

т. е. *тангенсъ суммы двухъ угловъ равенъ суммѣ тангенсовъ этихъ угловъ, дѣленной на разность между 1 и произведеніемъ тангенсовъ данныхъ угловъ.*

Точно также найдемъ:

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}, \qquad (6)$$

т. е. *тангенсъ разности двухъ угловъ равенъ разности тангенсовъ данныхъ угловъ, дѣленной на сумму 1 съ произведеніемъ тангенсовъ данныхъ угловъ.*

Примѣръ. Опредѣлить $\operatorname{tg}(\alpha\pm45^0)$. Имѣемъ:

$$\operatorname{tg}(\alpha\pm45^0)=\frac{\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}45^0}{1\mp\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}45^0}=\frac{\operatorname{tg}\alpha\pm1}{1\mp\operatorname{tg}\alpha}.$$

§ 52. Опредѣленіе котангенса для суммы и разности двухъ угловъ. Извѣстно, что

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta};$$

раздѣливъ числителя и знаменателя дроби на $\sin\alpha\sin\beta$, получимъ:

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\alpha}. \qquad (7)$$

Точно также найдемъ, что

$$\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha}. \qquad (8)$$

§ 53. Опредѣленіе тригонометрическихъ величинъ для алгебраической суммы трехъ, четырехъ и т. д. угловъ. Имѣемъ:

$\sin(\alpha+\beta+\gamma)=\sin(\alpha+\beta)\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta)\sin\gamma=\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+$
$+\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma+\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma;$
$\cos(\alpha+\beta+\gamma)=\cos(\alpha+\beta)\cos\gamma-\sin(\alpha+\beta)\sin\gamma=\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma+$
$-\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma-\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma-\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma;$

Также
$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)+\operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}(\alpha+\beta)\operatorname{tg}\gamma}$$

или, замѣнивъ $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ его величиною (§ 51) и умноживъ числителя и знаменателя на $1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$, получимъ:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma} \text{ и т. д.}$$

Примѣръ. Показать, что если $\alpha+\beta+\gamma=180^0$ и ни одинъ изъ угловъ не будетъ равенъ $(n+1/2)180^0$, гдѣ n цѣлое число, то

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma.$$

Положивъ, въ предъидущей формулѣ для $\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma)$, сумму $\alpha+\beta+\gamma=180^0$ и замѣтивъ, что, въ такомъ случаѣ, $\operatorname{tg}(\alpha+\beta+$

$+\gamma)=0$, заключаемъ, что и вторая часть равенства тоже равна нулю, а для этого необходимо, чтобы числитель

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$$

былъ бы равенъ нулю, т. е. чтобы

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma.$$

§ 54. Опредѣленіе суммы и разности синусовъ и косинусовъ двухъ угловъ. Изъ формулъ (1), (2), (3) и (4) (§§ 46, 47), получимъ:

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta,$$
$$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta,$$

и

$$\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\sin\beta.$$

Положимъ $\alpha+\beta=a$ и $\alpha-\beta=b$; тогда, сложивъ почленно эти равенства, найдемъ: $2\alpha=a+b$ или $\alpha=\frac{a+b}{2}$, а вычтя почленно второе равенство изъ перваго, получимъ: $2\beta=a-b$ или $\beta=\frac{a-b}{2}$. Теперь замѣнимъ въ предъидущихъ равенствахъ $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$, α и β ихъ величинами и найдемъ:

$$\sin a+\sin b=2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}, \qquad (9)$$

$$\sin a-\sin b=2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}, \qquad (10)$$

$$\cos a+\cos b=2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} \qquad (11)$$

и

$$\cos a-\cos b=-2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}, \qquad (12)$$

т. е. *сумма синусовъ двухъ угловъ равна удвоенному произведенію синуса полусуммы этихъ угловъ на косинусъ полуразности тѣхъ же угловъ; разность синусовъ двухъ угловъ равна удвоенному произведенію косинуса полусуммы этихъ угловъ на синусъ полуразности тѣхъ же угловъ и т. д.*

Раздѣливъ почленно (9) равенство на (10), найдемъ:

$$\frac{\sin a+\sin b}{\sin a-\sin b}=\frac{2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}}{2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}}=\frac{\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}}{\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}}, \qquad (13)$$

т. е. *сумма синусовъ двухъ данныхъ угловъ относится къ разности синусовъ тѣхъ же угловъ, точно такъ, какъ тангенсъ полусуммы данныхъ угловъ относится къ тангенсу полуразности тѣхъ же угловъ.*

Изъ (11) и (12) равенствъ также найдемъ, что

$$\frac{\cos a + \cos b}{\cos a - \cos b} = \frac{2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}}{-2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}} = -\operatorname{ctg}\frac{a+b}{2}\operatorname{ctg}\frac{a-b}{2}.$$

Примѣръ I. Опредѣлить $\sin(30^0 + \alpha) + \sin(30^0 - \alpha)$. Положивъ въ (9) формулѣ $a = 30^0 + \alpha$ и $b = 30^0 - \alpha$, получимъ:

$$\sin(30^0 + \alpha) + \sin(30^0 - \alpha) = 2\sin 30^0 \cos\alpha = 2 \,.\, {}^1/_2 \cos\alpha = \cos\alpha.$$

Примѣръ II. Опредѣлить $\cos(30^0 + \alpha) - \cos 30^0 - \alpha)$. Положивъ въ (12) формулѣ $a = 30^0 + \alpha$, и $b = 30^0 - \alpha$, найдемъ:

$$\cos(30^0 + \alpha) - \cos(30^0 - \alpha) = -2\sin 30^0 \,.\, \sin\alpha = -\sin\alpha.$$

Примѣръ III. Опредѣлить $\sin(45^0 + \varphi) - \sin(45^0 - \varphi)$. По формулѣ (10) найдемъ:

$$\sin(45^0 + \varphi) - \sin(45^0 - \varphi) = 2\cos 45^0 \sin\varphi = 2 \,.\, \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi = \sqrt{2} \,.\, \sin\varphi.$$

Примѣръ IV. Опредѣлить: $\sin(60^0 + \omega) - \sin(60^0 - \omega)$. По формулѣ (10) имѣемъ:

$$\sin(60^0 + \omega) - \sin(60^0 - \omega) = 2\cos 60^0 \sin\omega = \sin\omega.$$

§ 55. Опредѣленіе тригонометрическихъ величинъ для угловъ, кратныхъ данному. Положивъ въ (1) и (2) формулахъ (§ 46) $\beta = \alpha$, получимъ:

$$\sin(\alpha + \alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha$$

или

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha, \qquad (15)$$

т. е. *синусъ двойнаго даннаго угла равенъ удвоенному произведенію синуса даннаго угла на косинусъ того же угла.*

Также

$$\cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha$$

или

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha, \qquad (16)$$

т. е. *косинусъ двойнаго даннаго угла равенъ разности квадратовъ косинуса и синуса даннаго угла.*

Подставивъ въ (16) формулѣ $1-\sin^2\alpha$ вмѣсто $\cos^2\alpha$, получимъ:

$$\cos 2\alpha = 1 - \sin^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha, \qquad (17)$$

а подставивъ въ той же формулѣ $1-\cos^2\alpha$ вмѣсто $\sin^2\alpha$, найдемъ:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - (1-\cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1. \qquad (18)$$

Положивъ $\beta = \alpha$ въ (5) формулѣ § 51, найдемъ:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\alpha) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\alpha} \text{ или } \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}, \qquad (19)$$

т. е. *тангенсъ двойнаго даннаго угла равенъ удвоенному тангенсу даннаго угла, дѣленному на разность между 1 и квадратомъ тангенса этого угла.*

Положивъ $\beta = \alpha$ въ (7) формулѣ (§ 52), получимъ:

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\alpha) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha - 1}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha} \text{ или } \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}. \qquad (20)$$

Также найдемъ:

$$\begin{aligned}\sin 3\alpha &= \sin(2\alpha+\alpha) = \sin 2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha\sin\alpha\\ &= 2\sin\alpha\cos\alpha\cos\alpha + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\sin\alpha\\ &= 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha;\end{aligned}$$

но $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$ и потому

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha(1-\sin^2\alpha) - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha. \qquad (21)$$

Имѣемъ:

$$\begin{aligned}\cos 3\alpha &= \cos(2\alpha+\alpha) = \cos 2\alpha\cos\alpha - \sin 2\alpha\sin\alpha\\ &= (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\cos\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha\sin\alpha\\ &= \cos^3\alpha - 3\sin^2\alpha\cos\alpha;\end{aligned}$$

но $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$ и потому

$$\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha. \qquad (22)$$

Также

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg} 2\alpha\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}.\operatorname{tg}\alpha};$$

умноживъ числителя и знаменателя на $1-\operatorname{tg}^2\alpha$, получимъ:

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}. \qquad (23)$$

Такимъ же точно образомъ можемъ опредѣлить $\sin 4\alpha$, $\cos 4\alpha$ и т. д.

§ 56. Формулы для $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\sin 3\alpha$, $\cos 3\alpha$ и т. д. можно найти еще слѣдующимъ образомъ. Положивъ въ формулахъ (9) и (11) $a = (n+1)\alpha$ и $b = (n-1)\alpha$, найдемъ:

$$\sin(n+1)\alpha + \sin(n-1)\alpha = 2\sin n\alpha\cos\alpha$$

и

$$\cos(n+1)\alpha + \cos(n-1)\alpha = 2\cos n\alpha\cos\alpha;$$

отсюда

$$\sin(n+1)\alpha = 2\sin n\alpha\cos\alpha - \sin(n-1)\alpha \qquad (24)$$

и

$$\cos(n+1)\alpha = 2\cos n\alpha\cos\alpha - \cos(n-1)\alpha. \qquad (25)$$

Полагая $n = 1$, получимъ:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \text{ и } \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1;$$

полагая $n = 2$, найдемъ:

$$\sin 3\alpha = 2\sin 2\alpha\cos\alpha - \sin\alpha$$

и

$$\cos 3\alpha = 2\cos 2\alpha\cos\alpha - \cos\alpha \text{ и т. д.}$$

Примѣръ I. Показать, что $\operatorname{tg}(\alpha + 45^0) - \operatorname{tg}(\alpha - 45^0) = \operatorname{tg} 2\alpha$.

Имѣемъ:

$$\operatorname{tg}(\alpha + 45^0) - \operatorname{tg}(\alpha - 45^0) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + 1}{1 - \operatorname{tg}\alpha} - \frac{\operatorname{tg}\alpha - 1}{1 + \operatorname{tg}\alpha} =$$

$$= \frac{(\operatorname{tg}\alpha + 1)^2 - (\operatorname{tg}\alpha - 1)^2}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{4\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} = 2 . \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} = 2\operatorname{tg} 2\alpha.$$

Примѣръ II. Показать, что $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = 2\operatorname{cosec} 2\alpha$.

Имѣемъ:

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha} =$$

$$= \frac{2}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{2}{\sin 2\alpha} = 2\operatorname{cosec} 2\alpha.$$

Примѣръ III. Показать, что $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha = -2\operatorname{ctg} 2\alpha$.

Рѣшеніе:

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = -\frac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} =$$

$$= -\frac{2\cos 2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha} = -\frac{2\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = -2\operatorname{ctg} 2\alpha.$$

Примѣръ IV. Опредѣлить синусъ и косинусъ для угловъ въ 18^0 и 72^0.

Если означимъ уголъ, содержащій 18^0, буквою α, то $5\alpha = 90^0$ или $2\alpha + 3\alpha = 90^0$ и потому (§ 38)

$$\sin 2\alpha = \cos 3\alpha.$$

Поставивъ сюда вмѣсто $\sin 2\alpha$ и $\cos 3\alpha$ ихъ величины (§ 55), найдемъ:

$$2\sin\alpha\cos\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

или, раздѣливъ всѣ члены на $\cos\alpha$, получимъ:

$$2\sin\alpha = 4\cos^2\alpha - 3;$$

но $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$, а потому

$$2\sin\alpha = 4(1-\sin^2\alpha) - 3 \text{ или } 4\sin^2\alpha + 2\sin\alpha - 1 = 0;$$

откуда

$$\sin\alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}.$$

Sin 18^0 есть число положительное, а потому при $\sqrt{5}$ надо взять только $+$; получимъ:

$$\sin 18^0 = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

Теперь

$$\cos 18^0 = \sqrt{1-\sin^2 18^0} = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4},$$

$$\sin 72^0 = \cos 18^0 = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \text{ и } \cos 72^0 = \sin 18^0 = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Примѣръ V. Опредѣлить синусъ и косинусъ для угловъ въ 36^0 и 54^0.

Намъ извѣстно (§ 55), что $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$; подставивъ здѣсь 18^0 вмѣсто α, получимъ:

$$\cos 36^0 = 1 - 2\sin^2 18^0 = 1 - 2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 = \frac{\sqrt{5}+1}{4};$$

$$\sin 36^0 = \sqrt{1-\cos^2 36^0} = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

Отсюда легко опредѣлить $\sin 54^0$ и $\cos 54^0$, потому что $\sin 54^0 = \cos 36^0$ и $\cos 54^0 = \sin 36^0$.

Примѣръ VI. Повѣрить равенство:

$$\sin\alpha + \sin(72^0+\alpha) - \sin(72^0-\alpha) = \sin(36^0+\alpha) - \sin(36^0-\alpha).$$

По (10) формулѣ (§ 54):

$$\sin(72^0+\alpha) - \sin(72^0-\alpha) = 2\sin\alpha\cos 72^0$$

и $$\sin(36^0+\alpha) - \sin(36^0-\alpha) = 2\sin\alpha\cos 36^0;$$

слѣдовательно, данное равенство приметъ видъ:

$$\sin\alpha + 2\sin\alpha\cos 72^0 = 2\sin\alpha\cos 36^0.$$

Если $\alpha = n.180^0$, гдѣ n цѣлое число, то справедливость этого равенства очевидна; если же α не равно $n.180^0$, то, раздѣливъ всѣ члены на $\sin\alpha$, получимъ:

$$1 + 2\cos 72^0 = 2\cos 36^0.$$

Подставивъ вмѣсто $\cos 72^0$ и $\cos 36^0$ ихъ величины, найдемъ:

$$1 + 2.\frac{\sqrt{5}-1}{4} = 2.\frac{\sqrt{5}+1}{4} \quad \text{или} \quad \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

§ 57. Опредѣленіе тригонометрическихъ величинъ для угла, составляющаго половину, четверть и т. д. даннаго угла. Извѣстно, что

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \text{ и } \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha.$$

Складывая почленно эти равенства, найдемъ:

$$2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha \text{ или } \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}},$$

а вычтя —

$$2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha \text{ или } \sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}.$$

Поставивъ въ найденныхъ формулахъ $\frac{\alpha}{2}$ вмѣсто α, получимъ:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \quad (26) \quad \text{и} \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}, \quad (27)$$

т. е. *синусъ половины даннаго угла равенъ ± квадратный корень изъ полуразности между 1 и косинусомъ даннаго угла, а косинусъ половины даннаго угла равенъ ± квадратный корень изъ полусуммы 1 и косинуса даннаго угла.*

Изъ формулъ (26) и (27) видимъ, что для каждаго значенія $\cos\alpha$ имѣемъ по два значенія для $\sin\frac{\alpha}{2}$ и $\cos\frac{\alpha}{2}$, а потому если данъ только $\cos\alpha$ и ничего не дано относительно угла α, то неизвѣстно, какой надо взять знакъ при радикалѣ въ этихъ формулахъ; если же извѣстно какой четверти принадлежитъ уголъ α, то можно опредѣлить: будетъ ли $\sin\frac{\alpha}{2}$ или $\cos\frac{\alpha}{2}$ положительный или отрицательный, а слѣдовательно будетъ извѣстенъ и знакъ, который должно поставить предъ радикаломъ. Напр., если α заключается

между 180° и 270°, то $\frac{\alpha}{2}$ заключается между 90° и 135°, а потому синусъ для этого угла будетъ положительный, а косинусъ отрицательный; слѣдовательно, въ формулѣ (26) надо взять при радикалѣ знакъ +, а въ формулѣ (27) знакъ —.

Примѣръ. Опредѣлить $\sin 22^0 30'$ и $\cos 22^0 30'$. По формуламъ (26) и (27) получимъ:

$$\sin 22^0 30' = \sqrt{\frac{1-\cos 45^0}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

и $$\cos 22^0 30' = \sqrt{\frac{1+\cos 45^0}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

§ 58. Причину двойственности значеній для $\sin\frac{\alpha}{2}$ и $\cos\frac{\alpha}{2}$, когда данъ $\cos\alpha$, можно видѣть изъ слѣдующаго. Пусть φ будетъ одинъ изъ угловъ, имѣющихъ данный косинусъ; тогда всѣ углы, имѣющіе тотъ же косинусъ, выразятся (§ 45) формулою: $2n\pi \pm \varphi$; слѣдовательно, выраженіе, которое опредѣляетъ величину $\sin {}^1/_2\varphi$ въ зависимости отъ $\cos\varphi$, можетъ дать величину синуса для каждаго изъ угловъ, опредѣленныхъ формулою: ${}^1/_2(2n\pi \pm \varphi)$, гдѣ n цѣлое число. Но

$$\sin\frac{1}{2}(2n\pi \pm \varphi) = \sin\left(n\pi \pm \frac{\varphi}{2}\right) = \sin n\pi \cos\frac{\varphi}{2} \pm \cos n\pi \sin\frac{\varphi}{2} = \pm\sin\frac{\varphi}{2}.$$

Такимъ образомъ имѣемъ двѣ величины синуса, различающихся только знаками.

Точно также формула, которая даетъ величину $\cos {}^1/_2\varphi$ въ зависимости отъ $\cos\varphi$, можетъ также дать величину косинуса для каждаго изъ угловъ, опредѣленныхъ формулою: ${}^1/_2(2n\pi \pm \varphi)$, гдѣ n цѣлое число. Но

$$\cos\frac{1}{2}(2n\pi \pm \varphi) = \cos\left(n\pi \pm \frac{\varphi}{2}\right) = \cos n\pi \cos\frac{\varphi}{2} \mp \sin n\pi \sin\frac{\varphi}{2} = \pm\cos\frac{\varphi}{2};$$

слѣдовательно, имѣемъ двѣ величины косинуса, различающихся только знаками.

§ 59. Можно также опредѣлить синусъ и косинусъ половины угла въ зависимости отъ синуса цѣлаго угла. Извѣстно (§§ 31, 55), что

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \text{ и } 2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha.$$

Сложивъ почленно эти равенства, получимъ:

$$(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + \sin 2\alpha,$$

а вычтя почленно одно равенство изъ другаго, —

$$(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 1 - \sin 2\alpha;$$

откуда

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \pm\sqrt{1+\sin 2\alpha} \text{ и } \sin\alpha - \cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin 2\alpha}.$$

Подставивъ здѣсь $\frac{\alpha}{2}$ вмѣсто α, получимъ:

$$\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{1+\sin\alpha} \quad (28) \quad \text{и} \quad \sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{1-\sin\alpha}; \quad (29)$$

откуда

$$2\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{1+\sin\alpha} \pm \sqrt{1-\sin\alpha}$$

и

$$2\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{1+\sin\alpha} \mp \sqrt{1-\sin\alpha}.$$

Здѣсь имѣемъ четыре величины для $\sin\frac{\alpha}{2}$ и четыре величины для $\cos\frac{\alpha}{2}$, что можно объяснить слѣдующимъ образомъ: если φ означаетъ одинъ изъ угловъ, имѣющій данный синусъ, то всѣ углы, имѣющіе тотъ же синусъ, заключаются въ формѣ (§ 45): $n\pi + (-1)^n\varphi$; слѣдовательно, выраженіе, которое даетъ величину $\sin {}^1\!/_2\varphi$ въ зависимости отъ $\sin\varphi$, можетъ дать величину синуса каждаго изъ угловъ, опредѣленныхъ формулою: ${}^1\!/_2[n\pi + (-1)^n\varphi]$, гдѣ n цѣлое число. Предположимъ сперва n четнымъ и равнымъ $2m$; тогда

$$\sin\frac{1}{2}[n\pi + (-1)^n\varphi] = \sin\frac{1}{2}[2m\pi + (-1)^{2m}\varphi] = \sin\left(m\pi + \frac{\varphi}{2}\right)$$

$$= \sin m\pi\cos\frac{\varphi}{2} + \cos m\pi\sin\frac{\varphi}{2} = \pm\sin\frac{\varphi}{2}.$$

Предположимъ n нечетнымъ и равнымъ $2m+1$, получимъ:

$$\sin\frac{1}{2}[n\pi + (-1)^n\varphi] = \sin\frac{1}{2}[(2m+1)\pi + (-1)^{2m+1}\varphi] =$$

$$= \sin\frac{1}{2}(2m\pi + \pi - \varphi) = \sin\left(m\pi + \frac{\pi-\varphi}{2}\right) =$$

$$= \pm\sin\frac{\pi-\varphi}{2} = \pm\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}\right) = \pm\cos\frac{\varphi}{2};$$

откуда и видимъ, что данной величинѣ синуса угла соотвѣтствуютъ четыре величины синуса половины этого угла. Точно также формула, которая даетъ величину для $\cos {}^1\!/_2\varphi$ въ зависимости отъ $\sin\varphi$, можетъ также дать величину косинуса для каждаго изъ угловъ (§ 45), опредѣленныхъ формулою: ${}^1\!/_2[n\pi + (-1)^n\varphi]$; поступая также какъ въ предъидущемъ случаѣ, найдемъ:

$$\text{для } n \text{ четнаго: } \cos\frac{1}{2}[n\pi + (-1)^n\varphi] = \pm\cos\frac{\varphi}{2},$$

$$\text{для } n \text{ нечетнаго: } \cos\frac{1}{2}[n\pi + (-1)^n\varphi] = \pm\sin\frac{\varphi}{2}.$$

§ 60. Когда дана только величина $\sin\alpha$ и болѣе ничего не сказано относительно угла α, то неизвѣстно какія надобно взять знаки передъ радикалами въ формулахъ (28) и (29); но, если извѣстно, какой четверти принадлежитъ уголъ α, то вопросъ относительно знаковъ разрѣшается вполнѣ. Напр. пусть α заключается между 0^0 и 90^0; тогда $\frac{\alpha}{2}$ будетъ заключаться между 0^0 и 45^0 и потому $\sin\frac{\alpha}{2}$ и $\cos\frac{\alpha}{2}$ будутъ положительными, а слѣдоват. и сумма: $\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}$ будетъ тоже положительная и передъ

радиломъ въ (28) формулѣ надобно взять знакъ $+$; въ этомъ случаѣ (§ 33) $\cos\frac{\alpha}{2} > \sin\frac{\alpha}{2}$, а потому разность: $\sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2}$ отрицательная и передъ радикаломъ въ (29) формулѣ надо взять знакъ $-$. И такъ, когда α заключается между 0^0 и 90^0, то

$$\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1+\sin\alpha},\ \sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{1-\sin\alpha};$$

отсюда

$$2\sin\frac{\alpha}{2} = +\sqrt{1+\sin\alpha} - \sqrt{1-\sin\alpha}$$

и

$$2\cos\frac{\alpha}{2} = +\sqrt{1+\sin\alpha} + \sqrt{1-\sin\alpha}.$$

§ 61. Можно дать общую формулу для опредѣленія знаковъ при величинахъ: $\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}$ и $\sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2}$. Имѣемъ:

$$\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right).$$

$\operatorname{Sin}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ будетъ положительнымъ, когда $\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}$ (§ 22) заключается между $2n\pi$ и $(2n+1)\pi$ и отрицательнымъ, когда $\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}$ заключается между $(2n+1)\pi$ и $(2n+2)\pi$, гдѣ n цѣлое число или нуль; слѣдовательно, $\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ будетъ положительнымъ, когда $\frac{\alpha}{2}$ заключается между $2n\pi - \frac{\pi}{4}$ и $2n\pi + \frac{3\pi}{4}$ и отрицательнымъ, когда $\frac{\alpha}{2}$ заключается между $2n\pi + \frac{3\pi}{4}$ и $2n\pi + \frac{7\pi}{4}$.

Точно также

$$\sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right);$$

но $\sin\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ будетъ положительнымъ, когда $\frac{\alpha}{2}$ заключается между $2n\pi + \frac{\pi}{4}$ и $2n\pi + \frac{5\pi}{4}$ и отрицательнымъ, когда $\frac{\alpha}{2}$ заключается между $2n\pi + \frac{5\pi}{4}$ и $2n\pi + \frac{9\pi}{4}$.

Примѣръ. Опредѣлить $\sin 9^0$, $\cos 9^0$, $\sin 81^0$ и $\cos 81^0$.

По § 59 имѣемъ:

$$\sin 9^0 + \cos 9^0 = \sqrt{1 + \sin 18^0} = \frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{2}$$

и

$$\sin 9^0 - \cos 9^0 = -\sqrt{1 - \sin 18^0} = -\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2};$$

откуда

$$\sin 9^0 = \frac{\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{5-\sqrt{5}}}{2} \text{ и } \cos 9^0 = \frac{\sqrt{3+\sqrt{5}} + \sqrt{5-\sqrt{5}}}{2}.$$

Синусъ же и косинусъ 81^0 опредѣлятся по формуламъ:

$$\sin 81^0 = \cos 9^0 \text{ и } \cos 81^0 = \sin 9^0.$$

§ 62. Опредѣлимъ теперь $\operatorname{tg} {}^1/_2 \alpha$. Извѣстно, что

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sin\frac{\alpha}{2} : \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} : \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},$$

или

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}; \qquad (30)$$

умноживъ подъ корнемъ числителя и знаменателя дроби на $1+\cos\alpha$, получимъ:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos^2\alpha}{(1+\cos\alpha)^2}} = \pm\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}; \qquad (31)$$

или же, умноживъ числителя и знаменателя дроби, стоящей подъ радикаломъ въ (30) формулѣ, на $1-\cos\alpha$, найдемъ:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{(1-\cos\alpha)^2}{1-\cos^2\alpha}} = \pm\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}. \qquad (32)$$

Если знаемъ какой четверти принадлежитъ уголъ α, то тогда легко опредѣлить какой четверти принадлежитъ уголъ ${}^1/_2\alpha$, а слѣдовательно и знакъ передъ второю частью въ формулахъ (30), (31) и (32).

Изъ формулы (30) можно вывести, что

$$\cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \quad \text{а} \quad \sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

§ 63. Можно опредѣлить $\operatorname{tg} {}^1/_2\alpha$ въ зависимости отъ $\operatorname{tg}\alpha$. Въ § 55 имѣли:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha};$$

подставивъ здѣсь ${}^1/_2\alpha$ вмѣсто α, найдемъ:

$$\operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} : \left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right),$$

откуда и можемъ опредѣлить $\operatorname{tg} {}^1/_2\alpha$ по $\operatorname{tg}\alpha$. Для этого, уничтожимъ знаменателя въ этомъ уравненіи; получимъ:

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = 2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \quad \text{или} \quad \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} + 2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}\alpha = 0;$$

отсюда

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}{\operatorname{tg}\alpha}. \qquad (33)$$

Когда дана величина $\operatorname{tg}\alpha$ и знаемъ какой четверти принадлежитъ уголъ α, то можемъ опредѣлить какой знакъ слѣдуетъ взять при радикалѣ.

Объяснимъ теперь: почему для каждаго значенія $\operatorname{tg}\alpha$ соотвѣтствуетъ два значенія для $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$? Означимъ буквою φ одинъ изъ угловъ, имѣющихъ данный тангенсъ; тогда всѣ углы, имѣющіе тотъ-же тангенсъ, заключается въ формулѣ (§ 45) $n\pi+\varphi$, гдѣ n цѣлое число; слѣдовательно, выраженіе, которое даетъ величину $\operatorname{tg}{}^1/_2\varphi$ въ зависимости отъ $\operatorname{tg}\varphi$, можетъ дать величину тангенса каждаго изъ угловъ, опредѣленныхъ формулою ${}^1/_2(n\pi+\varphi)$, гдѣ n цѣлое число. Предположимъ n четнымъ и равнымъ $2m$; тогда

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(n\pi+\varphi)=\operatorname{tg}\frac{1}{2}(2m\pi+\varphi)=\operatorname{tg}\left(m\pi+\frac{\varphi}{2}\right)=\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2};$$

предположивъ-же n нечетнымъ и равнымъ $2m+1$, найдемъ;

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(n\pi+\varphi)=\operatorname{tg}\frac{1}{2}(2m\pi+\pi+\varphi)=\operatorname{tg}\left(m\pi+\frac{\pi+\varphi}{2}\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\varphi}{2}\right)=-\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}.$$

Отсюда видимъ, что при данномъ тангенсѣ имѣемъ двѣ величины для тангенса половины угла.

Примѣръ. Опредѣлить $\operatorname{tg}15^0$.

Извѣстно, что $\operatorname{tg}15^0$ есть число положительное, а потому, подставивъ въ (33) формулѣ 30^0 вмѣсто α, надо будетъ взять передъ радикаломъ знакъ $+$; получимъ:

$$\operatorname{tg}15^0=\frac{-1+\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 30^0}}{\operatorname{tg}30^0}=\frac{-1+\sqrt{1+{}^1/_3}}{\sqrt{{}^1/_3}}=-\sqrt{3}+\sqrt{4}=2-\sqrt{3}.$$

§ 64. Зная $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, легко опредѣлить $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. По § 31: $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=$ $=1:\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ и, замѣнивъ здѣсь $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ его величиною изъ формулъ (31) и (32), получимъ:

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\pm\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\pm\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}\ {}^{*)}\ \ldots\ldots (34).$$

---

*) Изъ равенства: $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$, имѣемъ: $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ или $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\operatorname{cosec}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha$; откуда $\operatorname{cosec}\alpha=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{ctg}\alpha$.

§ 65. По формуламъ §§ 57, 62 и 64 можемъ опредѣлить тригонометрическія величины угловъ: $\frac{\alpha}{4}, \frac{\alpha}{16}, \frac{\alpha}{32}, \ldots$ по тригонометрическимъ величинамъ угла α. Напр., чтобы опредѣлить $\sin\frac{\alpha}{4}$, вставимъ въ (26) формулѣ $\frac{\alpha}{2}$ вмѣсто α и получимъ:

$$\sin\frac{\alpha}{4} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\alpha}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}}.$$

§ 66. Опредѣленіе числа значеній $\cos\frac{\alpha}{3}$ и $\sin\frac{\alpha}{3}$ при данной величинѣ $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$. Опредѣлимъ $\cos\frac{\alpha}{3}$ по $\cos\alpha$, и для этого въ (22) формулѣ (§ 55):

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha;$$

подставимъ $\frac{\alpha}{3}$ вмѣсто α; получимъ:

$$\cos\alpha = 4\cos^3\frac{\alpha}{3} - 3\cos\frac{\alpha}{3}.$$

Это уравненіе третьей степени относительно $\cos\frac{\alpha}{3}$ и даетъ три величины для $\cos\frac{\alpha}{3}$. Причину этого можно объяснить такъ: если φ будетъ одинъ изъ угловъ, имѣющихъ данный косинусъ, то всѣ углы, имѣющіе тотъ же косинусъ, заключаются въ формулѣ (§ 45): $2n\pi \pm \varphi$, гдѣ n цѣлое число; слѣдовательно, равенство, опредѣляющее $\cos {}^1/_3\varphi$ по $\cos\varphi$, можетъ дать величину $\cos {}^1/_3\varphi$ для каждаго изъ угловъ, опредѣленныхъ формулою: ${}^1/_3(2n\pi \pm \varphi)$, гдѣ n цѣлое число. Здѣсь n можетъ или дѣлится на-цѣло на 3 или, при дѣленіи на 3, дать въ остаткѣ 1 или 2, т. е. n можетъ быть вида или $3m$, или $3m+1$ или $3m+2$. Предположимъ сперва $n = 3m$; тогда

$$\cos\frac{1}{3}(2n\pi \pm \varphi) = \cos\left(2m\pi \pm \frac{\varphi}{3}\right) = \cos\frac{\varphi}{3}.$$

Предположимъ $n = 3m+1$; тогда

$$\cos\frac{1}{3}(2n\pi \pm \varphi) = \cos\left(2m\pi + \frac{2\pi \pm \varphi}{3}\right) = \cos\frac{2\pi \pm \varphi}{3};$$

наконецъ, предположимъ $n = 3m+2$; тогда

$$\cos\frac{1}{3}(2n\pi \pm \varphi) = \cos\left(2m\pi + \frac{4\pi \pm \varphi}{3}\right) = \cos\frac{4\pi \pm \varphi}{3} = \cos\frac{2\pi \mp \varphi}{3}.$$

Слѣдовательно, при данномъ значеніи $\cos\varphi$, имѣемъ для $\cos\frac{\varphi}{3}$ три величины: $\cos\frac{\varphi}{3}$, $\cos\frac{2\pi+\varphi}{3}$ и $\cos\frac{2\pi-\varphi}{3}$.

§ 67. Легко также опредѣлить $\sin\frac{\alpha}{3}$ по $\sin\alpha$. Въ § 55 имѣли:

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha,$$

гдѣ подставивъ $\frac{\alpha}{3}$ вмѣсто α, получимъ:

$$\sin\alpha = 3\sin\frac{\alpha}{3} - 4\sin^3\frac{\alpha}{3};$$

это уравненіе даетъ три величины для $\sin\frac{\alpha}{3}$, именно: $\sin\frac{\varphi}{3}$, $\sin\frac{2\pi-\varphi}{3}$ и $\sin\frac{2\pi+\varphi}{3}$, гдѣ φ есть одинъ изъ угловъ, имѣющихъ данный синусъ.

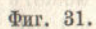
ОТДѢЛЪ IV.

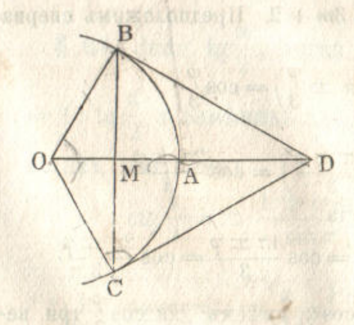


Нахожденіе тригонометрическихъ величинъ для угловъ.

§ 68. Теоремы, на которыхъ основывается нахожденіе тригонометрическихъ величинъ для малыхъ угловъ. Теорема I. *Если означимъ буквою ϑ круговую мѣру какого-нибудь угла, который меньше прямаго, то ϑ болѣе $\sin\vartheta$ и менѣе $tg\,\vartheta$.*

Возьмемъ уголъ AOB, меньшій прямаго; изъ точки B возставимъ перпендикуляръ къ OB и продолжимъ его до встрѣчи съ прямою OA въ точкѣ D; изъ точки-же B опустимъ перпендикуляръ BM на OA и, продолживъ его, отложимъ $MC = MB$; точку C соединимъ прямыми съ точками O и D. Прямоугольные треугольники OMC и OMB равны, потому что катетъ OM у нихъ общій, а $MC = MB$, по отложенію; слѣдовательно, $OC = OB$ и уголъ COM = углу BOM. Треугольники OCD и OBD также равны, потому что бокъ OD у нихъ общій; стороны OC и OB равны, какъ сейчасъ доказано, а уголъ $DOC = DOB$; слѣдова-


Фиг. 31.



тельно, $CD = BD$ и уголъ $OCD =$ углу OBD; уголъ же OBD прямой, а потому и уголъ OCD также прямой.

Изъ точки O опишемъ дугу радіусомъ OB; она касется CD въ точкѣ C и BD въ точкѣ B. Очевидно, что хорда BC менѣе дуги BAC, а потому и половина хорды BC менѣе половины дуги BAC, т. е. $BM < AB$; раздѣливъ обѣ части неравенства на OB, получимъ: $\frac{BM}{OB} < \frac{AB}{OB}$. Но $\frac{BM}{OB}$ есть синусъ угла AOB, а $\frac{AB}{OB}$ круговая мѣра угла AOB; поэтому $\sin AOB$ менѣе круговой мѣры угла AOB.

Также видимъ, что ломаная линія: $BD + DC$ болѣе дуги BAC; но $DC = DB$, а потому $2BD$ болѣе дуги BAC или BD болѣе половины дуги BAC, т. е. BD болѣе дуги AB; отсюда $\frac{BD}{OB} > \frac{AB}{OB}$.

А такъ какъ $\frac{BD}{OB}$ есть тангенсъ угла AOB, а $\frac{AB}{OB}$ есть круговая мѣра угла AOB, то выходитъ, что $\operatorname{tg} AOB$ болѣе круговой мѣры угла AOB.

Означивъ круговую мѣру угла AOB буквою ϑ, получимъ, при $0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$:

$$\sin\vartheta < \vartheta \text{ и } \operatorname{tg}\vartheta > \vartheta.$$

§ 69. Теорема II. *Предѣлъ отношенія $\frac{\sin\vartheta}{\vartheta}$, при неопредѣленномъ уменьшеніи ϑ, есть 1.*

Въ предъидущемъ параграфѣ нашли, что если $0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$, то

$$\sin\vartheta < \vartheta \text{ и } \vartheta < \operatorname{tg}\vartheta \text{ или } \sin\vartheta < \vartheta \text{ и } \vartheta < \frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta}.$$

Написавъ каждый изъ членовъ неравенства въ обратномъ видѣ, получимъ:

$$\frac{1}{\sin\vartheta} > \frac{1}{\vartheta} \text{ и } \frac{1}{\vartheta} > \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta} \text{ или } \frac{1}{\sin\vartheta} > \frac{1}{\vartheta} > \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta};$$

умноживъ всѣ члены неравенствъ на $\sin\vartheta$, найдемъ:

$$1 > \frac{\sin\vartheta}{\vartheta} > \cos\vartheta.$$

Когда ϑ приближается къ нулю, $\cos\vartheta$ приближается къ 1, а слѣдовательно и величина дроби $\frac{\sin\vartheta}{\vartheta}$, заключающейся между 1 и

$\cos\vartheta$, приближается къ единицѣ; наконецъ, когда ϑ сдѣлается равнымъ 0, то $\cos\vartheta$ будетъ равенъ 1 и предѣлъ отношенія $\sin\vartheta$ къ ϑ будетъ 1. И такъ

$$\lim.\frac{\sin\vartheta}{\vartheta}=1\text{ *)}.$$

Слѣдствіе. Такъ какъ $\frac{\operatorname{tg}\vartheta}{\vartheta}=\frac{\sin\vartheta}{\vartheta}\cdot\frac{1}{\cos\vartheta}$, то, при приближеніи ϑ къ нулю, $\frac{\sin\vartheta}{\vartheta}$ и $\frac{1}{\cos\vartheta}$ стремятся къ единицѣ, а потому и отношеніе $\operatorname{tg}\vartheta$ къ ϑ также стремится къ единицѣ; когда же $\vartheta=0$, то

$$\lim.\frac{\operatorname{tg}\vartheta}{\vartheta}=1.$$

§ 70. Теорема III. *Разность между круговою мѣрою угла, заключающагося между 0 и 90°, и его синусомъ менѣе четверти куба круговой мѣры этого угла.*

Пусть ϑ означаетъ круговую мѣру угла, заключающагося между 0° и 90°; тогда

$$\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}>\frac{\vartheta}{2}\text{ или }\sin\frac{\vartheta}{2}:\cos\frac{\vartheta}{2}>\frac{\vartheta}{2};\ \text{ откуда }\ \sin\frac{\vartheta}{2}>\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}.$$

Но (§ 55) $\sin\vartheta=\sin 2.\frac{\vartheta}{2}=2\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}$; подставивъ во второй части этого равенства вмѣсто $\sin\frac{\vartheta}{2}$ произведеніе $\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}$, мы уменьшимъ вторую часть, и слѣдовательно получимъ:

$$\sin\vartheta>2\,\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\ \text{ или }\ \sin\vartheta>\vartheta\cos^2\frac{\vartheta}{2};$$

извѣстно (§ 31), что $\cos^2\frac{\vartheta}{2}=1-\sin^2\frac{\vartheta}{2}$, а потому

$$\sin\vartheta>\vartheta\left(1-\sin^2\frac{\vartheta}{2}\right).$$

Это неравенство не измѣнится, если во второй части подставимъ $\frac{\vartheta}{2}$ вмѣсто $\sin\frac{\vartheta}{2}$, потому что отъ этого вычитаемое $\sin^2\frac{\vartheta}{2}$ увеличится, а слѣдовательно разность $1-\sin^2\frac{\vartheta}{2}$ уменьшится; поэтому

$$\sin\vartheta>\vartheta\left(1-\frac{\vartheta^2}{4}\right)\ \text{ или }\ \sin\vartheta>\vartheta-\frac{\vartheta^3}{4}.$$

---

*) Lim (limite) означаетъ предѣлъ.

Перенеся ϑ въ первую часть неравенства и перемѣнивъ знаки во всѣхъ членахъ на обратные, найдемъ:

$$\vartheta - \sin\vartheta < \frac{\vartheta^3}{4}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что предѣлы для $\sin\vartheta$, при $0<\vartheta<\frac{\pi}{2}$, суть:

$$\vartheta \text{ и } \vartheta - \frac{\vartheta^3}{4}.$$

§ 71. Можно также опредѣлить, между какими предѣлами заключается $\cos\vartheta$, когда $0<\vartheta<\frac{\pi}{2}$. Извѣстно, что $\cos\vartheta = 1 - 2\sin^2\frac{\vartheta}{2}$, а $\sin\frac{\vartheta}{2} < \frac{\vartheta}{2}$ и $\sin\frac{\vartheta}{2} > \frac{\vartheta}{2} - \frac{1}{4}\left(\frac{\vartheta}{2}\right)^3$ или $\sin\frac{\vartheta}{2} > \frac{\vartheta}{2} - \frac{\vartheta^3}{32}$. Теперь, если вмѣсто $\sin\frac{\vartheta}{2}$ подставимъ, въ предъидущемъ равенствѣ, бо̀льшую величину $\frac{\vartheta}{2}$, то вторая часть уменьшится и мы получимъ:

$$\cos\vartheta > 1 - 2\left(\frac{\vartheta}{2}\right)^2 \quad \text{или} \quad \cos\vartheta > 1 - \frac{\vartheta^2}{2};$$

а если, въ томъ-же равенствѣ, подставимъ вмѣсто $\sin\frac{\vartheta}{2}$ меньшую величину: $\frac{\vartheta}{2} - \frac{\vartheta^3}{32}$, то вторая часть увеличится и мы получимъ:

$$\cos\vartheta < 1 - 2\left(\frac{\vartheta}{2} - \frac{\vartheta^3}{32}\right)^2 \text{ или } \cos\vartheta < 1 - \frac{\vartheta^2}{2} + \frac{\vartheta^4}{16} - 2\left(\frac{\vartheta^3}{32}\right)^2$$

и тѣмъ болѣе

$$\cos\vartheta < 1 - \frac{\vartheta^2}{2} + \frac{\vartheta^4}{16}.$$

Слѣд., если круговая мѣра угла больше 0 и меньше $\frac{\pi}{2}$, то

$$\cos\vartheta > 1 - \frac{\vartheta^2}{2} \text{ и } \cos\vartheta < 1 - \frac{\vartheta^2}{2} + \frac{\vartheta^4}{16}.$$

§ 72. Приближенное вычисленіе sin 10″ и cos 10″. Круговая мѣра угла въ 10″ есть (§ 13)

$$\varepsilon = \frac{10\pi}{180.60.60} = \frac{\pi}{64800} = 0{,}000048481368110.. < 0{,}00005; \text{ но (§ 70)}$$

$$\sin 10'' < \varepsilon \text{ и } \sin 10'' > \varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{4},$$

гдѣ $\frac{\varepsilon^3}{4} < \frac{1}{4}(0{,}00005)^3$ или $\frac{\varepsilon^3}{4} < 0{,}0000000000000 32 \ldots$; слѣдовательно,

$$\sin 10'' < 0{,}00004848136810 \ldots$$

и

$$\sin 10'' > 0{,}00004848136807 8 \ldots$$

Въ этихъ двухъ предѣлахъ для $\sin 10''$ двѣнадцать первыхъ десятичныхъ знаковъ одинаковы, а потому, съ погрѣшностью меньшею $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^{13}}$, получимъ:

$$\sin 10'' = 0{,}0000484813681.$$

§ 73. Теперь опредѣлимъ $\cos 10''$. Согласно § 71 имѣемъ:

$$\cos 10'' > 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \text{ и } \cos 10'' < 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^4}{16},$$

а потому, если возьмемъ $\cos 10'' = 1 - \frac{\varepsilon^2}{2}$, то сдѣлаемъ погрѣшность, меньшую $\frac{\varepsilon^4}{16}$. Для опредѣленія величины этой погрѣшности, припомнимъ, что

$$\varepsilon < 0{,}00005, \text{ или } \varepsilon < \frac{5}{100000} \text{ или } \varepsilon < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^4};$$

слѣдовательно

$$\frac{\varepsilon^4}{16} < \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{2^4 . 10^{16}} \text{ или } \frac{\varepsilon^4}{16} < \frac{1}{256 . 10^{16}};$$

но $\frac{1}{256} < \frac{1}{2 . 10^2}$, а потому $\frac{\varepsilon^4}{16} < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^{18}}$; поэтому, принявши

$$\cos 10'' = 1 - \frac{\varepsilon^2}{2},$$

сдѣлаемъ погрѣшность меньшую $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^{18}}$.

Подставивъ вмѣсто ε его величину и ограничиваясь 13 десятичными знаками, найдемъ:

$$\cos 10'' = 0{,}9999999988248.$$

§ 74. Мы нашли, что $\sin 10''$ равняется круговой мѣрѣ угла въ $10''$ съ погрѣшностью, меньшею $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^{13}}$, а потому, очевидно, сдѣлаемъ еще меньшую ошибку, если приравняемъ $\sin 1''$ круговой мѣрѣ угла въ $1''$; слѣдовательно, для небольшаго значенія n,

можемъ допустить съ малою погрѣшностью, такое приближенное равенство:
$\sin n'' =$ круговой мѣрѣ $n'' = n.$ круг. мѣру $1'' = n.\ \sin 1''$ приблиз.; откуда

$$n = \frac{\text{круг. мѣрѣ } n''}{\sin 1''} \text{ приблизительно.}$$

Точно также получимъ:
$\operatorname{tg} n'' =$ круг. мѣрѣ $n'' = n.$ круг. мѣру $1'' = n.\ \operatorname{tg} 1''$ приблиз.; откуда

$$n = \frac{\text{круг. мѣрѣ } n''}{\operatorname{tg} 1''} \text{ приблизительно.}$$

§ 75. Вычисленіе тригонометрическихъ величинъ угловъ отъ 10″ до 10″ въ промежуткѣ отъ 0° до 90°. Въ тригонометрическихъ таблицахъ невозможно помѣстить тригонометрическія величины для всѣхъ угловъ, а потому помѣщаютъ тригонометрическія величины угловъ въ 10″, 20″ 30″, ... , т. е. постоянно увеличивая на 10″, или въ 1′, 2′, 3′. . . , т. е. постоянно увеличивая на 1′ и т. д.; въ первомъ случаѣ, говорятъ, что тригонометрическія таблицы составлены отъ 10″ до 10″, а во второмъ случаѣ отъ 1′ до 1′ и т. д.

Въ тригонометрическихъ таблицахъ нѣтъ надобности помѣщать тригонометрическія величины угловъ, большихъ 90°, потому что опредѣленіе тригонометрическихъ величинъ такихъ угловъ приводится (§§ 38—43) къ опредѣленію тригонометрическихъ угловъ, меньшихъ 90°.

§ 76. Въ I отдѣлѣ видѣли, что если знаемъ величину одной изъ тригонометрическихъ величинъ, то можемъ опредѣлить всѣ тригонометрическія величины того-же угла, а потому достаточно найти величины синусовъ угловъ первой четверти отъ 10″ до 10″; по нимъ уже будетъ легко опредѣлить другія тригонометрическія величины для тѣхъ угловъ, для которыхъ найдены синусы.

§ 77. Для опредѣленія $\sin 20''$, $\sin 30''$ и т. д. можно было бы воспользоваться формулами для синуса двойнаго, тройнаго и т. д. угловъ; но вычисленія по этимъ формуламъ очень затруднительны, а потому пользуются другими формулами, предложенными англійскимъ геометромъ Томасомъ *Симпсономъ* и найденными въ § 56. Мы тамъ нашли, что

$$\sin(n+1)\alpha = 2\sin n\alpha\cos\alpha - \sin(n-1)\alpha\ .\ .\ .\ (1)$$

гдѣ положивъ $\alpha = 10''$, а $n = 1, 2, 3, 4, ..,$ найдемъ $\sin 20''$, $\sin 30''$ ..... Напр., положивъ $n = 1$, найдемъ:

$$\sin 20'' = 2 \sin 10'' \cos 10'',$$

гдѣ $\sin 10''$ и $\cos 10''$. уже извѣстны (§§ 72, 73); положивъ $n = 2$, найдемъ:

$$\sin 30'' = 2 \cos 10'' \sin 20'' - \sin 10'' \text{ и т. д.}$$

§ 78. Показанный пріемъ вычисленія синусовъ угловъ, кратныхъ углу въ $10''$, можно еще упростить.

Въ формулѣ (1): $\cos\alpha = \cos 10''$ есть число постоянное и весьма мало разнится отъ единицы (§ 73), а потому множитель $2\cos\alpha$ мало разнится отъ 2; положимъ:

$$2 \cos 10'' = 2 - k,$$

гдѣ $k = 0{,}0000000023504430\,53$ съ погрѣшностью меньшею $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^{18}}$.

Подставивъ въ (1) формулу $2 - k$ вмѣсто $2\cos 10''$, найдемъ:

$$\sin(n+1)\alpha = (2-k)\sin n\alpha - \sin(n-1)\alpha$$

или

$$\sin(n+1)\alpha = 2\sin n\alpha - k\sin n\alpha - \sin(n-1)\alpha;$$

вычтя изъ обѣихъ частей равенства по $\sin n\alpha$, найдемъ:

$$\sin(n+1)\alpha - \sin n\alpha = \sin n\alpha - \sin(n-1)\alpha - k\sin n\alpha. \quad . \quad . \quad (2)$$

Это равенство даетъ возможность опредѣлить $\sin(n+1)\alpha - \sin n\alpha$ по разности $\sin n\alpha - \sin(n-1)\alpha$, которая уже передъ тѣмъ будетъ найдена, также какъ и $\sin(n-1)\alpha$; зная-же разность $\sin(n+1)\alpha - \sin n\alpha$, гдѣ $\sin n\alpha$ извѣстенъ, опредѣлимъ $\sin(n+1)\alpha$. Напр., положивъ во (2) формулѣ $n=1$ и $\alpha = 10''$, найдемъ: $\sin 20'' - \sin 10'' = \sin 10'' - k\sin 10''$; откуда опредѣлимъ $\sin 20''$, потому что $\sin 10''$ уже извѣстенъ. Положивъ $n = 2$, найдемъ: $\sin 30'' - \sin 20'' = (\sin 20'' - \sin 10'') - k\sin 20''$; разность же $\sin 20'' - \sin 10''$, $\sin 10''$ и $\sin 20''$ уже извѣстны, а потому найдемъ величину разности: $\sin 30'' - \sin 20''$, а слѣдовательно и величину $\sin 30''$ и т. д.

§ 79. Вычисленіе $k\sin n\alpha$ можетъ быть значительно упрощено, если составимъ заранѣе произведенія k на 2, на 3, на 4, на 5, 6, 7, 8 и 9.

Выгода при употребленіи (2) формулы въ сравненіи съ (1) состоитъ въ томъ, что въ (1) формулѣ приходится въ первомъ членѣ умножать $\sin n\alpha$ на число довольно значительное и именно на $2\cos 10'' = 1{,}9999999976495..$; между тѣмъ какъ во (2) формулѣ $\sin n\alpha$ приходится умножать на $k = 0{,}0000000023504....$

§ 80. Когда найдемъ синусы угловъ до 45^0, то вычисленіе синусовъ угловъ, бо́льшихъ 45^0, можемъ произвести по формулѣ (§ 54):

$$\sin(30^0 + \alpha) - \sin(30^0 - \alpha) = \sqrt{3}.\sin\alpha;$$

откуда

$$\sin(30^0 + \alpha) = \sqrt{3} \,.\, \sin\alpha + \sin(30^0 - \alpha),$$

гдѣ $\alpha < 30^0$.

Когда же найдемъ синусы угловъ до 60^0, то вычисленіе синусовъ угловъ отъ 60^0 до 90^0 можно произвести по формулѣ (§ 54):

$$\sin(60^0 + \alpha) - \sin(60^0 - \alpha) = \sin\alpha,$$

гдѣ α будемъ давать значенія отъ 0^0 до 30^0.

§ 81. Когда дѣлаютъ такія большія вычисленія, то необходимо полученные результаты повѣрять посредствомъ синусовъ такихъ угловъ, которые выражаются точно помощью радикаловъ и которые могутъ быть найдены съ какою угодно точностью. Кромѣ того, можно результаты повѣрять посредствомъ тождествъ, какъ напр. формула Ейлера (§ 56):

$$\sin\alpha + \sin(72^0 + \alpha) - \sin(72^0 - \alpha) = \sin(36^0 + \alpha) - \sin(36^0 - \alpha)$$

или, какъ формула Лежандра:

$$\sin(90^0 - \alpha) = \sin(54^0 + \alpha) + \sin(54^0 - \alpha) - \sin(18^0 + \alpha) - \sin(18^0 - \alpha),$$

кот. получ. изъ предъидущей, подставивъ въ нее $90^0 - \alpha$ вмѣсто α.

§ 82. Зная величины синусовъ для угловъ первой четверти, легко опредѣлить величины косинусовъ для угловъ первой же четверти по формулѣ:

$$\cos\alpha = \sin(90^0 - \alpha).$$

Величины тангенсовъ для угловъ, мéньшихъ 45^0, опредѣлимъ по формулѣ (§ 31): $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, а для угловъ, бóльшихъ 45^0, по формулѣ (§ 56):

$$\operatorname{tg}(45^0 + \alpha) - \operatorname{tg}(45^0 - \alpha) = 2\operatorname{tg}2\alpha;$$

откуда

$$\operatorname{tg}(45^0 + \alpha) = \operatorname{tg}(45^0 - \alpha) + 2\operatorname{tg}2\alpha.$$

Величины котангенсовъ для угловъ первой четверти опредѣлимъ по формулѣ:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}(90^0 - \alpha);$$

Величины косеканса опредѣлимъ по формулѣ:

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} \text{ или (§ 56) } \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right).$$

Величины секанса для угловъ первой четверти опредѣлимъ по формулѣ: $\sec\alpha = \operatorname{cosec}(90^0 - \alpha)$.

§ 83. Способъ, указанный нами, для опредѣленія тригонометрическихъ величинъ для угловъ, увеличивающихся на $10''$, есть тотъ, который былъ сперва употребленъ для составленія триго-

нометрическихъ таблицъ. Въ настоящее-же время есть болѣе простой пріемъ для вычисленія тригонометрическихъ величинъ помощью рядовъ. Этотъ способъ указанъ въ XII отдѣлѣ.

§ 84. Теорема. *Предѣлъ произведенія:* $\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{8}\ldots\cos\frac{x}{2^n}$, *въ которомъ n увеличивается безпредѣльно, есть* $\frac{\sin x}{x}$.

Мы знаемъ (§ 55), что $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$; также $\sin\frac{x}{2} = 2\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}$ и т. д.; такъ что

$$\begin{aligned}\sin x &= 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\\ &= 4\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{2}\\ &= 8\sin\frac{x}{8}\cos\frac{x}{8}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{2}\\ &= \ldots\ldots\ldots\\ &= 2^n\sin\frac{x}{2^n}\cos\frac{x}{2^n}\ldots\ldots\cos\frac{x}{8}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{2};\end{aligned}$$

откуда

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{8}\ldots\cos\frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}} = \frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}.$$

Когда n сдѣлается равнымъ безконечности, то предѣлъ отношенія $\sin\frac{x}{2^n}$ къ $\frac{x}{2^n}$ (§ 69) будетъ равенъ 1 и потому

$$\lim.\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{8}\ldots\cos\frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{x}.$$

§ 85. На основаніи выведенной теоремы можемъ показать, что если $\vartheta > 0$ и $< \frac{\pi}{2}$, то $\sin\vartheta > \vartheta - \frac{\vartheta^3}{6}$.

Въ § 71 доказано, что $\cos\vartheta > 1 - \frac{\vartheta^2}{2}$; слѣдовательно

$$\cos\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{4} > \left(1-\frac{\vartheta^2}{2^3}\right)\left(1-\frac{\vartheta^2}{2^5}\right)$$

и тѣмъ болѣе

$$\cos\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{4} > 1 - \left(\frac{\vartheta^2}{2^3}+\frac{\vartheta^2}{2^5}\right);$$

также

$$\cos\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{4}\cos\frac{\vartheta}{8} > \left[1-\left(\frac{\vartheta^2}{2^3}+\frac{\vartheta^2}{2^5}\right)\right]\left(1-\frac{\vartheta^2}{2^7}\right)$$

и подавно

$$\cos\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{4}\cos\frac{\vartheta}{8} > 1 - \left(\frac{\vartheta^2}{2^3}+\frac{\vartheta^2}{2^5}+\frac{\vartheta^2}{2^7}\right) \text{ и т. д.};$$

такъ что, вообще,

$$\cos\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{4}\cos\frac{\vartheta}{8}\cdots\cos\frac{\vartheta}{2^n}>1-\left(\frac{\vartheta^2}{2^3}+\frac{\vartheta^2}{2^5}+\frac{\vartheta^2}{2^7}+.+\frac{\vartheta^2}{2^{2n+1}}\right);$$

но $\frac{\vartheta^2}{2^3}+\frac{\vartheta^2}{2^5}+\frac{\vartheta^2}{2^7}+\ldots+\frac{\vartheta^2}{2^{2n+1}}$ есть сумма n членовъ геометрической прогрессіи, первый членъ которой $\frac{\vartheta^2}{2^3}$, а знаменатель $\frac{1}{2^2}$; она равна

$$\frac{\vartheta^2}{2^3}\left(1-\frac{1}{2^{2n}}\right):\left(1-\frac{1}{2^2}\right)=\frac{\vartheta^2}{6}-\frac{\vartheta^2}{3.2^{2n+1}};$$

слѣдовательно

$$\cos\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{4}\cos\frac{\vartheta}{8}\ldots\cos\frac{\vartheta}{2^n}>1-\frac{\vartheta^2}{6}+\frac{\vartheta^2}{3.2^{2n+1}}.$$

При $n=\infty$ первая часть равна $\frac{\sin\vartheta}{\vartheta}$, а потому

$$\frac{\sin\vartheta}{\vartheta}>1-\frac{\vartheta^2}{6} \text{ или } \sin\vartheta>\vartheta-\frac{\vartheta^3}{6}.$$

§ 86. Также (§§ 55, 85)

$$\cos\vartheta=1-2\sin^2\frac{\vartheta}{2} \text{ и } \sin\frac{\vartheta}{2}>\frac{\vartheta}{2}-\frac{\vartheta^3}{48},$$

а потому, поставивъ въ этомъ равенствѣ $\frac{\vartheta}{2}-\frac{\vartheta^3}{48}$ вмѣсто $\sin\frac{\vartheta}{2}$, получимъ:

$$\cos\vartheta<1-2\left(\frac{\vartheta}{2}-\frac{\vartheta^3}{48}\right)^2 \text{ или } \cos\vartheta<1-\frac{\vartheta^2}{2}+\frac{\vartheta^4}{24}.$$

§ 87. Задача. *Найти величины дробей:* $\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\alpha-\beta}$ *и* $\frac{\cos\alpha-\cos\beta}{\alpha-\beta}$ *при* $\alpha=\beta$.

При $\alpha=\beta$ данныя дроби обращаются въ $\frac{0}{0}$, а потому, чтобы найти истинное значеніе этихъ дробей, замѣнимъ разность синусовъ и косинусовъ произведеніями (§ 54); найдемъ:

$$\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\alpha-\beta}=\frac{2\sin{}^1\!/_2(\alpha-\beta)\cos{}^1\!/_2(\alpha+\beta)}{\alpha-\beta}=\frac{\sin{}^1\!/_2(\alpha-\beta)}{{}^1\!/_2(\alpha-\beta)}.\cos{}^1\!/_2(\alpha+\beta)$$

$$\frac{\cos\alpha-\cos\beta}{\alpha-\beta}=-\frac{2\sin{}^1\!/_2(\alpha-\beta)\sin{}^1\!/_2(\alpha+\beta)}{\alpha-\beta}=-\frac{\sin{}^1\!/_2(\alpha-\beta)}{{}^1\!/_2(\alpha-\beta)}.\sin{}^1\!/_2(\alpha+\beta).$$

Но такъ какъ предѣлъ отношенія sin дуги къ дугѣ, при ея безпредѣльномъ уменьшеніи, равенъ (§ 69) 1, то, при $\beta=\alpha$, отношеніе $\frac{\sin{}^1\!/_2(\alpha-\beta)}{{}^1\!/_2(\alpha-\beta)}$ равно 1; поэтому изъ предъидущихъ равенствъ увидимъ, что, при $\beta=\alpha$, первая дробь равна

$$\cos{}^1\!/_2(\alpha+\alpha)=\cos\alpha$$

а вторая дробь равна

$$-\sin{}^1\!/_2(\alpha+\alpha)=-\sin\alpha.$$

ОТДѢЛЪ V.

Вычисленіе логариѳмовъ тригонометрическихъ величинъ для угловъ. — Расположеніе таблицъ логариѳмовъ тригонометрическихъ величинъ для угловъ. — Теоремы, на которыхъ основывается нахожденіе логариѳмовъ тригонометрическихъ величинъ для угловъ, не помѣщенныхъ въ таблицахъ.

§ 88. Вычисленіе логариѳмовъ тригонометрическихъ величинъ и расположеніе таблицъ логариѳмовъ тригонометрическихъ величинъ для угловъ.

При нахожденіи числовыхъ величинъ данныхъ выраженій, бо̀льшею частью, прибѣгаютъ къ логариѳмамъ, а потому въ таблицахъ помѣщаютъ обыкновенно не самыя тригонометрическія величины для угловъ, а ихъ логариѳмы (которые не трудно опредѣлить по обыкновеннымъ логариѳмамъ чиселъ) и располагаютъ въ извѣстномъ порядкѣ. Такимъ образомъ получаютъ *таблицы логариѳмовъ тригонометрическихъ величинъ для угловъ*, разнящихся на одно и то же число секундъ; напр. на $10''$ или на $60''=1'$ и т. д.

§ 89. Составляя таблицу логариѳмовъ тригонометрическихъ величинъ для угловъ, надо вычислить только логариѳмы синусовъ для угловъ отъ 0^0 до 90^0, потому что логариѳмы косинусовъ для угловъ найдемъ по формулѣ:

$$\lg\cos\alpha = \lg\sin(90^0 - \alpha);$$

логариѳмы тангенсовъ опредѣлимъ по формулѣ:

$$\lg \operatorname{tg}\alpha = \lg\sin\alpha - \lg\cos\alpha;$$

логариѳмы котангенсовъ опредѣлимъ по формулѣ:

$$\lg \operatorname{ctg}\alpha = \lg\cos\alpha - \lg\sin\alpha \text{ или } \lg\operatorname{ctg}\alpha = -\lg\operatorname{tg}\alpha.$$

Что же касается до логариѳмовъ секанса и косеканса, то они будутъ равны, соотвѣтственно, логариѳмамъ косинуса и синуса, взятымъ съ знакомъ минусъ, потому что

$$\lg\sec\alpha = \lg\frac{1}{\cos\alpha} = -\lg\cos\alpha \text{ и } \lg\operatorname{cosec}\alpha = \lg\frac{1}{\sin\alpha} = -\lg\sin\alpha.$$

Логариѳмы секанса и косеканса рѣдко помѣщаютъ въ логариѳ-

мическихъ таблицахъ, потому что ихъ логариѳмы, какъ видѣли, опредѣляются весьма просто; кромѣ того, эти тригонометрическія величины довольно рѣдко встрѣчаются въ вычисленіяхъ.

§ 90. Синусы и косинусы для угловъ въ промежуткѣ отъ 0° до 90° менѣе единицы, а потому выражаются правильными дробями; тангенсы для угловъ въ промежуткѣ отъ 0° до 45° и котангенсы въ промежуткѣ отъ 45° до 90° менѣе единицы, а потому также выражаются правильными дробями. Слѣдовательно, логариѳмы синусовъ и косинусовъ въ промежуткѣ отъ 0° до 90°, тангенсовъ въ промежуткѣ отъ 0° до 45° и котангенсовъ отъ 45° до 90° будутъ отрицательные; для избѣжанія отрицательныхъ характеристикъ логариѳмовъ прибавили, въ указанныхъ случаяхъ, по 10 къ характеристикамъ логариѳмовъ, не измѣняя ихъ мантиссъ, а потому, при вычисленіяхъ, это обстоятельство не должно упускать изъ виду. Кромѣ того, намъ извѣстно (§ 22, 23, 24 и 25), что въ первой четверти, съ увеличеніемъ угла, синусы и тангенсы увеличиваются, а косинусы и котангенсы уменьшаются, и обратно; поэтому, съ увеличеніемъ угла, логариѳмы синуса и тангенса увеличиваются, а логариѳмы косинуса и котангенса уменьшаются, и обратно.

§ 91. Очевидно въ таблицахъ невозможно помѣстить логариѳмы тригонометрическихъ величинъ для всѣхъ угловъ первой четверти, а потому помѣщаютъ логариѳмы тригонометрическихъ величинъ для угловъ въ 10″, 20″, 30″ и т. д., т. е. увеличивающихся на 10″, и тогда говорятъ, что логариѳмы тригонометрическихъ величинъ даны отъ 10″ до 10″; или для угловъ въ 1′, 2′, 3′ и т. д., т. е. увеличивающихся на 1′, и тогда говорятъ, что логариѳмы тригонометрическихъ величинъ даны отъ 1′ до 1′ и т. д. Всѣ логариѳмы тригонометрическихъ величинъ одной таблицы находятъ съ однимъ и тѣмъ же числомъ десятичныхъ знаковъ; такъ, ограничиваются семью десятичными знаками послѣ запятой, и говорятъ, что логариѳмы симизначные, или пятью десятичными знаками, и говорятъ, что логариѳмы пятизначные и т. д.

Изъ семизначныхъ таблицъ логариѳмовъ наиболѣе употребительныя суть: Каллета, Вега, обработанные Бремикеромъ, и Шрёна, а изъ пятизначныхъ Лаланда и Hoüel. Въ примѣрахъ на вычисленія по семизначнымъ логариѳмамъ я пользовался таблицами Вега, а при вычисленіяхъ по пятизначнымъ таблицамъ логариѳмовъ — таблицами, изданными мною.

§ 92. Теоремы, на которыхъ основывается нахожденіе логариѳмовъ тригонометрическихъ величинъ для угловъ, не помѣщенныхъ въ таблицѣ. Опредѣленіе логариѳмовъ тригонометрическихъ величинъ для угловъ первой четверти, не заключающихся въ таблицахъ, основывается на теоремѣ: *разности логариѳмовъ одной изъ тригонометрическихъ величинъ приблизительно пропорціональны разностямъ соотвѣтствующихъ имъ угловъ.*

Эту теорему докажемъ послѣдовательно для синусовъ, косинусовъ, тангенсовъ и котангенсовъ.

1. *Для логариѳмовъ синуса.* Означимъ буквою α данный уголъ и буквою ϑ ближайшій изъ угловъ, котораго логариѳмъ синуса намъ извѣстенъ; пусть h означаетъ разность между α и ϑ; тогда $\alpha = \vartheta + h$, гдѣ h будетъ менѣе $10''$, когда пользуемся таблицами, гдѣ логариѳмы тригонометрическихъ величинъ даны отъ $10''$ до $10''$, и менѣе $1'$, когда пользуемся таблицами, гдѣ логариѳмы тригонометрическихъ величинъ даны отъ $1'$ до $1'$.

Мы знаемъ, что

$$\sin(\vartheta + h) = \sin\vartheta \cos h + \sin h \cos\vartheta;$$

если h будетъ меньше $10''$, то можемъ приблизительно положить: $\cos h = 1$, а $\sin h = h$ (§ 70 и 71), и тогда получимъ:

$$\sin(\vartheta + h) = \sin\vartheta + h\cos\vartheta \qquad (1)$$

Здѣсь необходимо посмотрѣть, какъ велика будетъ погрѣшность при опредѣленіи $\sin(\vartheta + h)$, отъ замѣны $\cos h$ единицею и $\sin h$ числомъ h. Если положимъ $\cos h = 1$, то сдѣлаемъ погрѣшность (§ 74), меньшую $\frac{1}{2}h^2$; но $h = 10''$, а круговая мѣра h будетъ менѣе (§ 13) $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^4}$ и потому $\frac{1}{2}h^2 < \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{10^8}$ или $\frac{1}{2}h^2 < 0{,}00000001$; слѣдовательно, замѣнивъ $\cos h$ единицею, сдѣлаемъ погрѣшность, меньшую единицы восьмаго десятичнаго знака послѣ запятой и потому будемъ всегда имѣть восемь точныхъ десятичныхъ знаковъ. Если-же положимъ $\sin h = h$, то сдѣлаемъ погрѣшность (§ 70), меньшую $^1/_4 h^3$; а такъ какъ $h = 10''$, то погрѣшность, въ этомъ случаѣ, будетъ менѣе $0{,}0000000000001$; слѣдовательно, эта замѣна не окажетъ вліянія на восьмой десятичный знакъ. Отсюда видимъ, что съ точностью до единицы седьмаго десятичнаго знака, формула $\sin(\vartheta + h) = \sin\vartheta + h\cos\vartheta$ справедлива для всѣхъ значеній h, меньшихъ $10''$. Раздѣливъ обѣ части (1) равенства на $\sin\vartheta$, получимъ:

$$\frac{\sin(\vartheta + h)}{\sin\vartheta} = 1 + h\,\mathrm{ctg}\,\vartheta.$$

Въ алгебрѣ же доказано, что если $-1 < x < +1$, то

$$\lg(1 + x) = M\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots\ldots\right),$$

гдѣ M есть модуль системы логариѳмовъ при основаніи 10 и равенъ 0,43429448....; поэтому, замѣнивъ здѣсь x произведеніемъ $h \operatorname{ctg} \vartheta$, найдемъ:

$$\lg \frac{\sin(\vartheta+h)}{\sin \vartheta} = \lg(1+h \operatorname{ctg} \vartheta) = M\left(h \operatorname{ctg} \vartheta - \frac{h^2 \operatorname{ctg}^2 \vartheta}{2} + \frac{h^3 \operatorname{ctg}^3 \vartheta}{3} - ..\right) \ldots (2)$$

и, если ограничимся первымъ членомъ ряда, то получимъ приблизительно:

$$\lg \frac{\sin(\vartheta+h)}{\sin \vartheta} = M h \operatorname{ctg} \vartheta$$

или

$$\lg \sin(\vartheta+h) - \lg \sin \vartheta = Mh \operatorname{ctg} \vartheta \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Точно также найдемъ, что, при $h_1 < 10''$,

$$\lg \sin(\vartheta+h_1) - \lg \sin \vartheta = Mh_1 \operatorname{ctg} \vartheta;$$

откуда

$$\frac{\lg \sin(\vartheta+h) - \lg \sin \vartheta}{\lg \sin(\vartheta+h_1) - \lg \sin \vartheta} = \frac{h}{h_1} \text{ приблизительно.}$$

Для болѣе строгой оцѣнки теоремы, необходимо опредѣлить погрѣшность отъ отбрасыванія въ (2) равенствѣ членовъ съ h^2, съ h^3 и т. д.; при этомъ замѣтимъ, что наибольшая погрѣшность будетъ отъ члена, содержащаго h^2, гдѣ $h < 10''$, въ чемъ убѣдиться нетрудно, найдя величины послѣдующихъ членовъ посредствомъ логариѳмовъ. Опредѣлимъ величину члена $\frac{1}{2} Mh^2 \operatorname{ctg}^2 \vartheta$, когда $h < 10''$. Модуль $M < \frac{1}{2}$, $h < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^4}$, а потому, при откидываніи втораго члена въ (2) равенствѣ, сдѣлаемъ погрѣшность, меньшую $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{10^8} . \operatorname{ctg}^2 \vartheta = \frac{\operatorname{ctg}^2 \vartheta}{16.10^8}$, которая съ измѣненіемъ ϑ будетъ измѣняться, а потому, чтобы погрѣшность была бы менѣе $\frac{1}{10^7}$, необходимо, чтобы $\frac{\operatorname{ctg}^2 \vartheta}{16.10^8} < \frac{1}{10^7}$, или $\operatorname{ctg} \vartheta < \sqrt{160}$ или $\operatorname{ctg} \vartheta < 13$; найдено-же, что $\operatorname{ctg} 5^0 < 12$ и $\operatorname{ctg} 4^0 > 14$, а потому ϑ должно быть болѣе 5^0 (*). Гдѣ не требуется большой точности, тамъ и для угловъ, меньшихъ 5^0, все-таки пользуются этою теоремою.

Чтобы можно было пользоваться этою теоремою для угловъ, меньшихъ 5^0, но не очень малыхъ, въ нѣкоторыхъ таблицахъ какъ напр. въ логариѳмахъ Вега, помѣщены логариѳмы синусовъ для угловъ отъ 1″ до 1″ для первыхъ пяти градусовъ. При углахъ-же очень малыхъ существуютъ другіе пріемы для опредѣленія логариѳмовъ синусовъ, указанные въ VI отдѣлѣ.

II. *Для логариѳмовъ косинуса.* Если (3) въ равенствѣ поставимъ $\frac{\pi}{2} - \vartheta$ вмѣсто ϑ, то получимъ:

---

*) Величина третьяго члена (2) равенства, т. е. $\frac{1}{3} Mh^3 \operatorname{ctg}^3 \vartheta$, при $\vartheta > 5^0$ и $h < 10''$, менѣе: $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{10^{12}} \sqrt{160^3} = \frac{\sqrt{160}}{3.10^{11}} < 0,00000000001$.

$$\lg\sin\left(\frac{\pi}{2}-\vartheta+h\right)-\lg\sin\left(\frac{\pi}{2}-\vartheta\right)=Mh\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\vartheta\right)$$

или

$$\lg\cos(\vartheta-h)-\lg\cos\vartheta=Mh\operatorname{tg}\vartheta;$$

поставивъ здѣсь $-h$ вмѣсто h, получимъ:

$$\lg\cos(\vartheta+h)-\lg\cos\vartheta=-Mh\operatorname{tg}\vartheta;\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

также найдемъ, что, при $h_1 < 10''$,

$$\lg\cos(\vartheta+h_1)-\lg\cos\vartheta=-Mh_1\operatorname{tg}\vartheta.$$

Изъ этихъ равенствъ получимъ:

$$\frac{\lg\cos(\vartheta+h)-\lg\cos\vartheta}{\lg\cos(\vartheta+h_1)-\lg\cos\vartheta}=\frac{h}{h_1} \text{ приблизительно:}$$

Чтобы ошибка въ этомъ случаѣ была менѣе $\frac{1}{10^7}$, гдѣ $h'' < 10''$ и $h_1 < 10''$, необходимо, чтобы $90^0-\vartheta > 5^0$, или $\vartheta < 90^0-5^0$ или $\vartheta < 85^0$.

III. *Для логариѳмовъ тангенса.* Если вычтемъ почленно (4) равенство изъ (3), то получимъ:

$$[\lg\sin(\vartheta+h)-\lg\cos(\vartheta+h)]-[\lg\sin\vartheta-\lg\cos\vartheta]=Mh(\operatorname{ctg}\vartheta+\operatorname{tg}\vartheta)$$

или

$$\lg\frac{\sin(\vartheta+h)}{\cos(\vartheta+h)}-\lg\frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta}=Mh\frac{2}{\sin 2\vartheta}$$

или

$$\lg\operatorname{tg}(\vartheta+h)-\lg\operatorname{tg}\vartheta=\frac{2\,Mh}{\sin 2\vartheta} \text{ приблизительно; . .} \quad (5)$$

также для $h_1 < 10''$

$$\lg\operatorname{tg}(\vartheta+h_1)-\lg\operatorname{tg}\vartheta=\frac{2\,Mh_1}{\sin 2\vartheta}$$

откуда

$$\frac{\lg\operatorname{tg}(\vartheta+h)-\lg\operatorname{tg}\vartheta}{\lg\operatorname{tg}(\vartheta+h_1)-\lg\operatorname{tg}\vartheta}=\frac{h}{h_1} \text{ приблизительно.}$$

Чтобы въ этомъ случаѣ ошибка была менѣе $\frac{1}{10^7}$, гдѣ $h < 10''$ и $h_1 < 10''$, необходимо, чтобы уголъ ϑ былъ бы болѣе 5^0.

IV. *Для логариѳмовъ котангенса.* Подставивъ въ (5) формулѣ $\frac{\pi}{2}-\vartheta$ вмѣсто ϑ, получимъ:

$$\lg\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\vartheta+h\right)-\lg\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\vartheta\right)=\frac{2Mh}{\sin(\pi-2\vartheta)},$$

или

$$\lg\operatorname{ctg}(\vartheta-h)-\lg\operatorname{ctg}\vartheta=\frac{2\,Mh}{\sin 2\vartheta};$$

подставивъ здѣсь $-h$ вмѣсто h, найдемъ:

$$\lg\operatorname{ctg}(\vartheta+h)-\lg\operatorname{ctg}\vartheta=-\frac{2\,Mh}{\sin 2\vartheta} \text{ приблиз.:}$$

также найдемъ, при $h_1 < 10''$, что

$$\lg \operatorname{ctg}(\vartheta + h_1) - \lg \operatorname{ctg} \vartheta = -\frac{2\,Mh_1}{\sin 2\vartheta}.$$

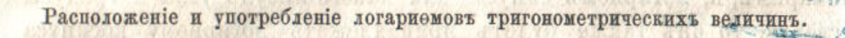
Изъ этихъ равенствъ получимъ:

$$\frac{\lg \operatorname{ctg}(\vartheta + h) - \lg \operatorname{ctg} \vartheta}{\lg \operatorname{ctg}(\vartheta + h_1) - \lg \operatorname{ctg} \vartheta} = \frac{h}{h_1} \text{ приблиз.}$$

Чтобы ошибка, при употребленіи этой пропорціи, не вліяла на седьмой десятичный знакъ, при $h < 10''$ и $h_1 < 10''$, необходимо, чтобы уголъ ϑ былъ бы менѣе 85^0.

ОТДѢЛЪ VI.

Расположеніе и употребленіе логариѳмовъ тригонометрическихъ величинъ.



§ 93. Въ этомъ отдѣлѣ будетъ изложено только расположеніе и употребленіе семизначныхъ таблицъ логариѳмовъ Вега; расположеніе же и употребленіе пятизначныхъ таблицъ логариѳмовъ, изд. мною, читатель найдетъ въ предисловіи къ этимъ таблицамъ.

§ 94. Въ таблицахъ Вега помѣщены семизначные логариѳмы синусовъ, косинусовъ, тангенсовъ и котангенсовъ отъ $10''$ до $10''$ для угловъ первой четверти (см. таблицу III, стр. 289) и семизначные логариѳмы синусовъ и тангенсовъ отъ $1''$ до $1''$ для первыхъ 5 градусовъ, а слѣдовательно и логариѳмы косинусовъ и котангенсовъ отъ 85^0 до 90^0 (см. таблицу II, стр. 187).

РАСПОЛОЖЕНІЕ И УПОТРЕБЛЕНІЕ III ТАБЛИЦЫ (стр. 289).

§ 95. Сверху и снизу каждой страницы поставлено число градусовъ, и если прослѣдимъ всю эту таблицу, то увидимъ, что вверху идутъ градусы отъ 0^0 до 45^0, а внизу отъ 45^0 до 90^0. Каждая страница раздѣлена вертикальными линіями на нѣсколько частей: въ первомъ слѣва столбцѣ и послѣднемъ справа (′) помѣщены минуты, а во второмъ и предпослѣднемъ (″) секунды; при этомъ замѣтимъ, что если беремъ градусы сверху, то минуты и секунды надо взять съ лѣвой стороны той страницы, гдѣ беремъ градусы; а если беремъ градусы снизу, то минуты и секунды

надо взять съ правой стороны этой страницы. Въ столбцахъ, гдѣ написано: sin, tang, cotg и cos помѣщены, соотвѣтственно, логариѳмы синусовъ, тангенсовъ, котангенсовъ и косинусовъ; также замѣтимъ, что внизу написаны тригонометрическія величины, обратныя тѣмъ, которыя написаны сверху; напр., если сверху написано sin, то снизу cos. Это обстоятельство объясняется слѣдующимъ образомъ: одному и тому-же горизонтальному ряду соотвѣтствуетъ два угла, смотримъ-ли мы сверху или снизу страницы, сумма которыхъ равна 90^0; такъ, если возьмемъ уголъ въ $25^0 16' 40''$ и посмотримъ сколько содержитъ градусовъ, минутъ и секундъ уголъ, соотвѣтствующій этому ряду, когда градусы беремъ снизу, то найдемъ: $64^0 43' 20''$; откуда и видимъ, что одинъ уголъ служитъ другому дополненіемъ до 90^0. Изъ этого выходитъ, что если возьмемъ, напримѣръ, логариѳмъ синуса для какого-нибудь угла и градусы сверху, то онъ также будетъ принадлежать логариѳму косинуса угла (дополнительнаго), для котораго градусы беремъ снизу, что и выражено надписями, поставленными сверху и снизу каждаго столбца. Подлѣ столбцовъ, въ которыхъ помѣщены логариѳмы синуса и косинуса (у косинуса не всегда), имѣются, съ правой руки каждаго, столбцы съ надписями d. (diffirentia), въ которыхъ помѣщены разности между двумя послѣдовательными логариѳмами синусовъ, а также и косинусовъ. Между логариѳмами тангенсовъ и котангенсовъ находится столбецъ съ надписью d. c. (diffirentia communis), который содержитъ общія разности между двумя последовательными логариѳмами тангенсовъ и котангенсовъ. Такъ, если означимъ буквами α и β два послѣдовательные угла и буквою δ разность между логариѳмами тангенсовъ этихъ угловъ, то найдемъ:

$$\delta = \lg \operatorname{tg} \alpha - \lg \operatorname{tg} \beta;$$

но $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$ и $\operatorname{ctg} \beta = \frac{1}{\operatorname{tg} \beta}$ и потому

$$\lg \operatorname{ctg} \alpha = -\lg \operatorname{tg} \alpha \quad \text{и} \quad \lg \operatorname{ctg} \beta = -\lg \operatorname{tg} \beta;$$

слѣдовательно

$$\lg \operatorname{ctg} \beta - \lg \operatorname{ctg} \alpha = \lg \operatorname{tg} \alpha - \lg \operatorname{tg} \beta = \delta.$$

Съ боку каждой страницы помѣщены столбцы, въ которыхъ указано: сколько изъ полной разности приходится на $1'', 2'', \ldots 9''$.

И такъ, *если градусы беремъ сверху, то минуты и секунды надо брать слѣва этой-же страницы, а надписи sin, cos, tang* и *cotg читать сверху; если-же градусы беремъ снизу, то минуты и секунды надо брать справа, а надписи sin, cos, tang и cotg читать снизу той-же страницы.*

Помощію этой таблицы можемъ рѣшить два вопроса: 1) по данному углу опредѣлить логариѳмъ тригонометрической величины его 2) по данному логариѳму тригонометрической величины для угла, опредѣлить самый уголъ.

§ 96. По данному углу найти логариѳмъ тригонометрической величины этого угла. Здѣсь можетъ быть: 1) что данный уголъ находится въ таблицѣ и 2) что данный уголъ не находится въ таблицѣ. Изъ приведенныхъ ниже примѣровъ будетъ понятно, какъ слѣдуетъ поступать въ томъ и другомъ случаѣ.

Примѣръ I. Опредѣлить $\lg \sin 25^0 12' 20''$. Находимъ страницу въ таблицѣ III, гдѣ написано сверху 25^0, и въ крайнемъ лѣвомъ столбцѣ $12'$ (441 стр.); затѣмъ идемъ къ низу отъ $12'$ и смотримъ въ сосѣднемъ столбцѣ ($''$) ближайшее число 20; тогда, въ горизонтальномъ ряду съ 20 и въ столбцѣ, гдѣ написано сверху sin, стоитъ табличный $\lg \sin 20^0 12' 20''$, т. е. увеличенный на 10 противъ настоящаго; слѣдовательно

$$\lg \sin 25^0 12' 20'' = 9{,}6292740 - 10$$
$$= \bar{1}{,}6292740.$$

Примѣръ II. Найти $\lg \operatorname{ctg} 72^0 48' 30''$. Отыскиваемъ страницу, гдѣ написано снизу 72^0 и въ крайнемъ правомъ столбцѣ $48'$ (393 стр.); потомъ идемъ къ верху и смотримъ въ смежномъ столбцѣ (гдѣ стоитъ $''$), не доходя до $49'$, число 30; искомый табличный логариѳмъ находится въ томъ же горизонтальномъ ряду, гдѣ взяли $30''$, и въ томъ столбцѣ, гдѣ написано снизу cotg; тамъ найдемъ: 9,4905096. Слѣдовательно

$$\lg \operatorname{ctg} 72^0 48' 30'' = 9{,}4905096 - 10$$
$$= \bar{1}{,}4905096.$$

Примѣръ III. Найти $\lg \operatorname{tg} 51^0 13' 10''$. Рѣшеніе (стр. 523): $\lg \operatorname{tg} 51^0 13' 10'' = 0{,}0950346$.

Примѣръ IV. Найти $\lg \cos 2^0 50''$. Рѣшеніе (стр. 302): $\lg \cos 2^0 50'' = \bar{1}{,}9997317$.

Примѣръ V. Опредѣлить lg tg 42° 39′ 46″. Въ таблицахъ нѣтъ угла въ 42° 39′ 46″, а есть два ближайшихъ къ нему, изъ которыхъ одинъ болѣе даннаго и равенъ 42° 39′ 50″, а другой менѣе даннаго и равенъ 42° 39′ 40″; беремъ логариѳмъ тангенса ближайшаго меньшаго угла, т. е. 42° 39′ 40″, и находимъ на стр. 545, что

$$\lg \operatorname{tg} 42^\circ 39' 40'' = 9{,}9645036.$$

Мы взяли уголъ меньше даннаго на 6″, а потому и найденный логариѳмъ меньше настоящаго; слѣдовательно, для полученія искомаго логариѳма, надо взятый логариѳмъ увеличить на нѣкоторое число, соотвѣтствующее 6″. На той-же страницѣ, гдѣ lg tg 42° 39′ 40″, смотримъ, въ столбцѣ d. c., какова разность между взятымъ логариѳмомъ и ближайшимъ большимъ и находимъ 423 десятимилліонныхъ; разность-же между меньшимъ и большимъ углами равна 10″; слѣдовательно, на 10″ приходится 423 десятимилліонныхъ, а на 6″ неизвѣстно сколько приходится и положимъ x. Въ (§ 92) доказано, что, для одной и той-же тригонометрической величины, разности между логариѳмами двухъ послѣдовательныхъ угловъ, помѣщенныхъ въ таблицахъ, приблизительно пропорціональны разностямъ соотвѣтствующихъ имъ угловъ, а потому

$$\frac{10''}{6''} = \frac{423}{x}\text{; откуда } x = \frac{423.6}{10} = 253{,}8$$

десятимилліоннымъ или просто $x = 254$ десятимилліоннымъ. Придавъ это число къ меньшему логариѳму: 9,9645036, получимъ искомый табличный логариѳмъ: 9,9645290. И такъ

$$\lg \operatorname{tg} 42^\circ 39' 46'' = 9{,}9645290 - 10 = \bar{1}{,}9645290.$$

Вмѣсто того, чтобы составлять пропорцію для опредѣленія x, можемъ воспользоваться столбцомъ 423, помѣщеннымъ съ боку страницы, гдѣ видимъ, что на 6″ приходится 253,8 десятимилл. или просто 254 десятимил.

Вычисленія располагаютъ такъ:

$$\lg \operatorname{tg} 42^\circ 39' 40'' = 9{,}9645036 - 10. \text{ Табл. разн. } 423.$$
$$6'' \quad \ldots +254$$
$$\lg \operatorname{tg} 42^\circ 39' 46'' = 9{,}9645290 - 10 = \bar{1}{,}9645290.$$

Примѣръ VI. Найти $\lg \sin 78^{0}\,36'',2$. Поступая такъ же, какъ въ предъидущемъ случаѣ, найдемъ (стр. 361):

$$\lg \sin 78^{0}\,36'',2 = \overline{1},9904206.$$

Примѣръ VII. Найти $\lg \cos 51^{0}\,48'\,17'',26$. Въ таблицахъ нѣтъ угла въ $51^{0}\,48'\,17'',26$, а есть два ближайшіе, изъ которыхъ одинъ болѣе даннаго угла и равенъ $51^{0}\,48'\,20''$, а другой менѣе даннаго и равенъ $51^{0}\,48'\,10''$. Въ таблицахъ, на стр. 519, находимъ, что

$$\lg \cos 51^{0}\,48'\,20'' = 9,7912219$$

и

$$\lg \cos 51^{0}\,48'\,10'' = 9,7912486;$$

откуда видимъ, что искомый логариѳмъ заключается между 9,7912219 и 9,7912486 и что большему углу соотвѣтствуетъ меньшій логариѳмъ: 9,7912219; кромѣ того, замѣчаемъ, что для полученія искомаго логариѳма слѣдуетъ увеличить меньшій логариѳмъ, т. е. соотвѣтствующій углу въ $51^{0}\,48'\,20''$, или уменьшить большій логариѳмъ, соотвѣтствующій углу въ $51^{0}\,48'\,10''$. Положимъ, что мы желаемъ воспользоваться меньшимъ логариѳмомъ; разность между $51^{0}\,48'\,20''$ и $51^{0}\,48'\,17'',26$ есть $2'',74$, а разность между соотвѣтствующими логариѳмами неизвѣстна и мы ее означимъ буквою x; разность-же между большимъ и меньшимъ углами равна $10''$, а разность между соотвѣтствующими логариѳмами (см. столбецъ d) равна 267 десятимил. Намъ извѣстно (§ 92), что разности между двумя табличными логариѳмами косинусовъ приблизительно пропорціональны разностямъ между соотвѣтствующими имъ углами, а потому получимъ:

$$\frac{10''}{2'',74} = \frac{267}{x}; \text{ откуда } x = \frac{267.2,74}{10} = 73,158 \text{ десятимил.}$$

или просто $x = 73$ десятимил.; придавъ 73 десятимил. къ меньшему логариѳму 9,7912219, получимъ искомый табличный логариѳмъ 9,7912292. И такъ

$$\lg \cos 51^{0}\,48'\,17'',26 = 9,7912292 - 10$$
$$= \overline{1},7912292.$$

Если воспользуемся $\lg \cos 52^{0}\,48'\,10''$, то соотвѣтствующій ему логариѳмъ придется уменьшить на число, соотвѣтствующее разности даннаго угла и $52^{0}\,48'\,10''$, т. е. на $7'',26$. На $10''$ приходится 267 десятимилліонныхъ, а сколько приходится на $7'',26$ неизвѣстно;

положимъ x. Тогда $\frac{10''}{7'',26}=\frac{267}{x}$; откуда $x=\frac{7,26.267}{10}=193{,}842$ десятимил., или просто, 194 десятимилліонныхъ.

Слѣдовательно, искомый табличный логариѳмъ равенъ: 9,7912486 безъ 194 десятимил. или 9,7912292. Вычисленіе располагаютъ такъ:

$$\begin{aligned} \lg\cos 52^0 48' 10'' \quad &= 9{,}7912486 \\ +7'',26 \quad &\quad -194 \\ \hline \lg\cos 52^0 48' 17'',26 &= 9{,}7912292-10 \\ &= \overline{1},7912292. \end{aligned}$$

Вмѣсто того, чтобы опредѣлять x изъ пропорціи, можемъ воспользоваться столбцомъ, подъ номеромъ 267. Взявъ $\lg\cos 52^0 48' 20''$, придется его увеличить на число, соотвѣтствующее $2'',74$; въ столбцѣ 267 видимъ, что на $2''$ приходится 53,4; на $0'',7$ — 18,69, а на $0'',04$ — 1,068; всего 73,158 десятимил. или 73 десятимил. Вычисленіе располагаютъ такъ:

$$\begin{aligned} \lg\cos 52^0 48' 20'' \quad &= 9{,}7912219 \ \ldots \text{ Табл. разн. } 267. \\ 2'' \ &\ldots\ldots\ldots 53{,}4 \\ -\quad 0'',7 \ &\ldots\ldots + \ 18{,}69 \\ 0'',04 \ &\ldots\ldots\ldots 1{,}068 \\ \hline \lg\cos 52^0 48' 17'',26 &= 9{,}7912292 \quad -10 \\ &= \overline{1},7912292. \end{aligned}$$

Примѣръ VIII. Найти $\lg\operatorname{ctg} 32^0 48'',76$. Поступая какъ въ предъид. случаѣ, найдемъ (стр. 482), что $\lg\operatorname{ctg} 32^0 48'',76=0{,}2039823$.

§ 97. По данному логариѳму тригонометрической величины для угла, опредѣлить соотвѣтствующій уголъ. Логариѳмы каждой изъ тригонометрическихъ величинъ находятся въ двухъ столбцахъ, изъ которыхъ одинъ служитъ продолженіемъ другаго (§ 95); поэтому, отыскивая данный логариѳмъ, надо пользоваться обоими столбцами. При рѣшеніи предлагаемаго вопроса можетъ быть два случая: 1) данный логариѳмъ находится въ таблицѣ и 2) данный логариѳмъ не находится въ таблицѣ. Слѣдующіе примѣры объяснятъ вполнѣ, какъ слѣдуетъ поступать въ томъ и другомъ случаѣ.

Примѣръ I. Дано: $\lg\sin x=\overline{1},7020913$; опредѣлить x.

Для полученія табличнаго логариѳма синуса, должно прибавить къ данному логариѳму 10; получимъ 9,7020913. Смотримъ, гдѣ находится число 9,7020913 въ столбцахъ, въ которыхъ написано

сверху или снизу sin, обращая сперва вниманіе на характеристику 9 и первый десятичный знакъ 7, а потомъ уже и на остальные десятичные знаки; на страницѣ 471 находимъ логариѳмъ, равный данному. Такъ какъ надпись sin въ этомъ столбцѣ сверху, то градусы беремъ сверху, а слѣдовательно минуты и секунды слѣва; при этомъ, секунды беремъ въ томъ же горизонтальномъ ряду, гдѣ стоитъ данный логариѳмъ, а минуты беремъ тѣ, которыя стоятъ въ сосѣднемъ столбцѣ (′) и нѣсколько выше взятыхъ секундъ. Согласно сказанному, надо будетъ взять 30^0, $20''$ и $14'$; слѣдовательно $x = 30^0\,14'\,20''$.

Примѣръ II. Дано: $\lg \operatorname{ctg} x = \overline{1},9075080$; опредѣлить x.

Здѣсь логариѳмъ котангеса отрицательный, а потому соотвѣтствующій уголъ болѣе 45^0 (§ 90); слѣдовательно, данный логариѳмъ находится въ томъ столбцѣ, гдѣ подпись cotg внизу. Чтобы получить табличный логариѳмъ, прибавимъ 10 къ данному логариѳму, найдемъ: 9,9075080; обращая сперва вниманіе на характеристику 9 и первый десятичный знакъ 9, а потомъ и на остальные десятичные знаки, найдемъ на стр. 523 данный логариѳмъ. Подпись cotg помѣщена снизу, а потому беремъ градусы также снизу (51^0), а минуты и секунды справа этой страницы; причемъ секунды надо взять въ томъ же горизонтальномъ ряду, гдѣ данный логариѳмъ ($20''$), а минуты въ сосѣднемъ столбѣ и нѣсколько ниже взятыхъ секундъ ($3'$); слѣдовательно $x = 51^0\,3'\,20''$.

Примѣръ III. $\lg \operatorname{tg} x = 0,5635125$; опредѣлить x. Рѣшеніе (стр. 381): $x = 74^0\,43'\,10''$.

Примѣръ IV. $\lg \cos x = \overline{1},9974041$; опредѣлить x. Рѣшеніе (стр. 327): $x = 6^0\,15'\,30''$.

Примѣръ V. $\lg \operatorname{tg} x = \overline{1},9676879$; опредѣлить x.

Для полученія табличнаго логариѳма прибавимъ 10 къ данному; найдемъ: 9,9676879. Обращая вниманіе на характеристику 9 и первые два десятичные знака 9 и 6, видимъ, на стр. 547, что нѣтъ такого логариѳма, а есть ближайшій къ нему и меньшій его: 9,9676715 или ближайшій къ данному и большій его: 9,9677137, между которыми находится данный логариѳмъ.

Взявъ ближайшій къ данному логариѳму и меньшій его: 9,9676715, увидимъ, что ему соотвѣтствуетъ уголъ въ $42^0\,52'\,10''$, который меньше искомаго; поэтому, слѣдуетъ найденный уголъ увеличить на нѣкоторое число секундъ, соотвѣтствующее разности между дан-

нымъ и найденнымъ логариѳмами, т. е. 164 десятимил.; разность между упомянутыми меньшимъ и большимъ логариѳмами равна (см. столбецъ d) 422 десятимил.; слѣд. на 422 десятимил. приходится $10''$, а на 164 десятимил., положимъ, приходится y''. Намъ извѣстно, что разности между логариѳмами тангенсовъ угловъ пропорціональны приблизительно разностямъ соотвѣтствующихъ угловъ, а потому

$$\frac{y''}{10''}=\frac{164}{422}\text{; откуда } y''=\frac{164\,.\,10''}{422}=3'',89.$$

И такъ, искомый уголъ $x=42^{0}\,52'\,10''+3'',89=42^{0}\,52'13'',89$.

Нахожденіе числа секундъ, на которое слѣдуетъ увеличить меньшій уголъ, можно произвести помощью одного изъ столбцовъ, помѣщенныхъ съ боку каждой страницы. Въ самомъ дѣлѣ, найдя разность 422 десятимил. между большимъ и меньшимъ логариѳмами относительно даннаго, обращаемся къ столбцу, на верху котораго стоитъ число 422. Разность между меньшимъ и даннымъ логариѳмами есть 164; поэтому, отыскиваемъ въ правой сторонѣ этого столбца число 164, а если его нѣтъ, то ближайшее меньшее и находимъ 126,6, которому соотвѣтствуетъ $3''$; вычитаемъ 126,6 изъ 164, находимъ 37,4. Найденное число 37,4 увеличиваемъ въ 10 разъ, получаемъ 374 и ищемъ въ томъ же столбѣ ближайшее меньшее число; находимъ 337,6, которому соотвѣтствуетъ $8''$. Вычтя 337,6 изъ 374, получимъ 36,4; увеличиваемъ его въ 10 разъ и, желая окончить вычисленіе, ищемъ, въ томъ-же столбцѣ, ближайшее число къ 364; находимъ 379,8, которому соотвѣтствуетъ $9''$; слѣдовательно 37,4 соотвѣтствуетъ $0'',89$, а потому y'' приблизительно равенъ $3'',89$.

Самое вычисленіе располагаютъ такъ:

	$\lg \operatorname{tg} x = 9{,}9676879$.		Таб. разн. = 422.
ближ. меньш. логарѳ.	715 *)		$42^{0}\,52'\,10''$
	164		
ближ. меньш. число въ 422 столбцѣ:	126,6		$3''$
1-ый остат., увел. въ 10 разъ:	37 4		
ближ. меньш. число въ 422 столбцѣ:	337,6		$0'',8$
2-ой остат., увел. въ 10 разъ:	364		
ближайшее число въ 422 столбцѣ:	379,8		$0'',09$;

слѣдовательно $x=42^{0}\,52'\,13'',89$.

---

*) Первыя цифры меньшаго логариѳма, одинаковыя съ первыми цифрами даннаго логариѳма, обыкновенно не пишутъ.

Примѣръ VI. Дано $\lg\cos x = \bar{1},1752016$. Опредѣлить x.

Для полученія табличнаго логариѳма, прибавимъ 10 къ данному и найдемъ: 9,1752016. Обращая вниманіе на характеристику 9 и первые два десятичные знака 1 и 7, находимъ на стр. 341, что такого логариѳма въ таблицахъ нѣтъ, а есть два ближайшіе, изъ которыхъ одинъ 9,1753004 болѣе даннаго и соотвѣтствуетъ углу въ $81^\circ 23' 20''$, а другой 9,1751613 меньше даннаго и соотвѣтствуетъ углу въ $81^\circ 23' 30''$. Съ увеличеніемъ угла, въ первой четверти, косинусъ уменьшается, а слѣдовательно и логариѳмъ косинуса также уменьшается, и обратно; поэтому, взявши большій логариѳмъ 9,1753004, видимъ, что соотвѣтствующій ему уголъ въ $81^\circ 23' 20''$ меньше искомаго угла, а потому этотъ уголъ надо увеличить на число секундъ, соотвѣтствующее разности между ближайшимъ большимъ: 9,1753004 и даннымъ: 9,1752016, которая равна 988 десятимил. Означивъ буквою y число секундъ, соотвѣтствующее 988 десятимил., и найдя въ столбцѣ d разность между ближайшимъ меньшимъ и ближайшимъ большимъ логариѳмами относительно даннаго, которая равна 1391 десятимил. и которой соотвѣтствуетъ $10''$, можемъ составить пропорцію (§ 92):

$$\frac{y''}{10''} = \frac{988}{1391}; \text{ откуда } y'' = \frac{988 \,.\, 10''}{1391} = 7'',1.$$

Слѣдовательно, искомый уголъ x равенъ $81^\circ 23' 20'' + 7'',1 = 81^\circ 23' 27'',1$.

Вмѣсто того, чтобы составлять пропорцію для опредѣленія y'', можемъ воспользоваться столбцомъ для числа 1391, а если его нѣтъ, то столбцомъ для ближайшаго числа къ 1391, т. е. столбцомъ для числа 1390. Поступая, какъ въ предъидущемъ примѣрѣ, найдемъ:

Ближайш. больш. логариѳ. . . . . . 3004 . . . $81^\circ 23' 20''$

$\lg\cos x = 9,1752016$. Таб. раз. 1391

1-ый остат. . . 988

ближайш. меньш. число въ 1390 столб. 973 . . . . $7''$

2-ой остат., увел. въ 10 разъ, 150

Ближ. число въ 1390 столб. 139 . . . . $0'',1$

Слѣдовательно $x = 81^\circ 23' 27'',1$.

Если бы взяли ближайшій меньшій логариѳмъ, то поправку въ секундахъ пришлось бы вычесть изъ $81^\circ 23' 30''$ и получили бы тотъ же самый результатъ.

Примѣръ VII. Опредѣлить x, когда $\lg\sin x = 9{,}6247687$. Рѣш. (стр. 439): $x = 24^0 55' 39'',21$.

Примѣръ VIII. Опредѣлить x, когда $\lg\operatorname{ctg} x = 0{,}0967543$. Рѣш. (стр. 522): $x = 38^0 40' 11'', 39$.

§ 98. Если синусъ угла равняется числу меньшему единицѣ и мало разнящемуся отъ 1, то соотвѣтствующій уголъ близокъ къ 90^0; въ этомъ случаѣ, отысканіе по III таблицѣ соотвѣтствующаго угла будетъ неудобно, потому что, если углы близки къ 90^0, то ихъ синусы, а слѣдовательно и логариѳмы синусовъ измѣняются очень медленно, такъ что бываетъ, какъ видно изъ таблицъ, по нѣскольку одинакихъ логариѳмовъ; вслѣдствіе этого неизвѣстно, какой именно взять изъ соотвѣтствующихъ угловъ. Напр., опредѣлить x, когда $\lg\sin x = \bar{1},9999998$; въ таблицѣ видимъ, что тамъ такихъ логариѳмовъ синуса находится пять, которымъ соотвѣтствуютъ углы: $89^0 56' 20''$, $89^0 56' 30''$, $89^0 56' 40''$, $89^0 56' 50''$ и $89^0 57'$; слѣдовательно x будетъ равенъ одному изъ предъидущихъ угловъ. Чтобъ избѣжать такой неопредѣленности, при рѣшеніи подобныхъ вопросовъ, можемъ воспользоваться слѣдующею формулою; пусть требуется опредѣлить x, когда $\sin x = n$, гдѣ n менѣе 1 и мало разнится отъ нея; имѣемъ (§ 57):

$$\sin\left(45^0 - \frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos(90^0 - x)}{2}} = \sqrt{\frac{1-\sin x}{2}} = \sqrt{\frac{1-n}{2}}.$$

Точно также, если надо опредѣлить x изъ уравненія $\cos x = m$, гдѣ m положительное число и мало разнится отъ 0, то можемъ воспользоваться формулою:

$$\sin\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} = \sqrt{\frac{1-m}{2}}.$$

Примѣръ. Опредѣлить x, когда $\sin x = 0{,}9999972$. Имѣемъ:

$$\sin\left(45^0 - \frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-0{,}9999972}{2}} = \sqrt{0{,}0000014};$$

откуда $\lg\sin\left(45^0 - \frac{x}{2}\right) = \frac{\lg 0{,}0000014}{2} = \bar{3},0730640$ и $45^0 - \frac{x}{2} =$ $= 4' 4'',11$; слѣд. $x = 89^0 51' 51'',78$.

§ 99. Теперь опредѣлимъ: съ какою точностію находятъ углы, когда даны семизначные логариѳмы тригонометрическихъ величинъ. Означимъ буквою d табличную разность; она приходится

на 10″, а потому дробь $\frac{10''}{d}$ соотвѣтствуетъ измѣненію угла, когда логариѳмъ измѣняется на единицу 7-го десятичнаго знака; слѣд. ошибка при опредѣленіи угла можетъ простираться до $\frac{10''}{d}$. Разсматривая таблицу, видимъ, что для синусовъ угловъ близкихъ къ 90^0, а также косинусовъ малыхъ угловъ, разность $d <$ или $= 1$; слѣд. дробь $\frac{10''}{d}$ можетъ простираться до 10″ и болѣе, такъ что углы близкіе къ 90^0 дурно опредѣлять чрезъ ихъ синусы, а углы близкіе къ 0^0 — чрезъ ихъ косинусы.

Для тангенсовъ и котангенсовъ самая малая разность 421 при углѣ въ 45^0, а потому наибольшая величина дроби $\frac{10''}{d} = \frac{10''}{421} = 0'',03$. Поэтому, если уголъ отыскивается по тангенсу или котангенсу, то ошибка, при опредѣленіи его, не можетъ быть болѣе 0″,03.

РАСПОЛОЖЕНІЕ И УПОТРЕБЛЕНІЕ II ТАБЛИЦЫ (стр. 187).

§ 100. Когда уголъ заключается между 0^0 и 5^0 и не находится въ таблицѣ, то логариѳмъ синуса или логариѳмъ тангенса такого угла, вообще говоря, не можетъ быть вѣрно опредѣленъ съ помощію таблицы III, потому что пропорція, служащая для опредѣленія поправки логариѳма, не всегда даетъ результаты съ точностью до 0,0000001 (§ 92); то-же самое можемъ сказать и о логариѳмахъ косинуса и котангенса для угловъ, которые не находятся въ таблицѣ и заключаются между 85^0 и 90^0 (§ 92); точно также и при рѣшеніи обратныхъ вопросовъ въ вышеупомянутыхъ случаяхъ, окажется ошибка въ опредѣленіи поправки. Для устраненія, до нѣкоторой степени, этихъ погрѣшностей, составлена таблица II, гдѣ помѣщены отъ 1″ до 1″ логариѳмы синусовъ и тангенсовъ для угловъ въ промежуткѣ отъ 0^0 до 5^0, а слѣдовательно и логариѳмы косинусовъ и котангенсовъ въ промежуткѣ отъ 85^0 до 90^0. Вслѣдствіе уменьшенія промежутка между послѣдующими углами, возможно, въ указанныхъ случаяхъ, пользоваться пропорціею (§ 92).

§ 101. На каждой страницѣ этой таблицы, сверху, написано sin или tang для угловъ въ промежуткѣ отъ 0^0 до 5^0, а снизу написано, соотвѣтственно, cos и cotg для угловъ въ про-

межуткѣ отъ 85^0 до 90^0; минуты стоятъ сверху и снизу каждой страницы, а секунды справа и слѣва каждой-же страницы. При употребленіи этихъ таблицъ, если берутъ градусы сверху, то минуты надо взять также сверху, а секунды на этой-же страницѣ слѣва; если-же градусы будутъ снизу, то минуты надо взять также снизу, а секунды на той-же страницѣ справа. Въ этой таблицѣ ко всѣмъ логариѳмамъ прибавлено по 10.

§ 102. По данному углу найти логариѳмъ тригонометрической величины этого угла. *Примѣръ I.* Найти $\lg \sin 2^0 16' 48''$.

Отыскиваемъ страницу, гдѣ написано сверху $\sin 2^0$, и подъ нимъ $16'$ (232 стр.); затѣмъ, на этой-же страницѣ, беремъ слѣва $48''$ и идемъ по горизонтальному ряду вправо до тѣхъ поръ, пока не попадемъ въ столбецъ, гдѣ написано сверху $16'$; здѣсь и находится искомый табличный логариѳмъ: 8,5996976; слѣдовательно

$$\lg \sin 2^0 16' 48'' = 8,5996976 - 10$$
$$= \overline{2},5996976.$$

Примѣръ II. Найти $\lg \operatorname{ctg} 89^0 59' 26''$.

Отыскиваемъ страницу, гдѣ написано внизу ея $\operatorname{ctg} 89^0$ и внизу же столбца $59'$ (стр. 189); затѣмъ, на этой же страницѣ, беремъ справа $26''$ и идемъ влѣво по горизонтальному ряду до тѣхъ поръ, пока не попадемъ въ столбецъ, гдѣ написано внизу $59'$; здѣсь и находится искомый табличный логариѳмъ: 6,2170538; слѣдовательно

$$\lg \operatorname{ctg} 89^0 59' 26'' = \overline{4},2170538.$$

Примѣръ III. Найти $\lg \operatorname{tg} 4^0 16'', 84$.

Въ таблицѣ угла $4^0 16'', 84$ нѣтъ, а потому беремъ логариѳмъ тангенса угла, ближайшаго къ данному и меньшаго его; получаемъ:

$$\lg \operatorname{tg} 4^0 0' 16'' = 8,8451276.$$

Этотъ логариѳмъ меньше даннаго и потому его слѣдуетъ увеличить на число, соотвѣтствующее $0'',84$, которое означимъ буквою x. Разность между $\lg \operatorname{tg} 14^0 16''$ и $\lg \operatorname{tg} 4^0 17''$ есть 302 десятимил., а разность между соотвѣтствующими углами равна $1''$; поэтому, на основаніи § 92, получимъ:

$$\frac{0'',84}{1''} = \frac{x}{302}; \text{ откуда } x = 302.0,84$$

или $x = 254$ десятимилліоннымъ.

И такъ

$$\begin{aligned} \lg \operatorname{tg} 4^0 16'' &= 8,8451276 \\ +0'',84 \quad & \quad +254 \\ \hline \lg \operatorname{tg} 4^0 16'',84 &= 8,8451530 - 10 \\ &= \overline{2},8451530. \end{aligned}$$

Примѣръ IV. Найти $\lg \sin 1^0 48' 0'', 46$.

Рѣшеніе сходно съ предъидущимъ; найдемъ (стр. 224):

$$\lg \sin 1^0 48' 0'', 46 = \overline{2},4971092.$$

Примѣръ V. Найти $\lg \operatorname{ctg} 86^0 54' 16'', 45$.

Угла въ $86^0 54' 16'', 45$ въ таблицѣ нѣтъ, а потому беремъ ближайшій большій уголъ къ данному, т. е. $86^0 54' 17''$ и находимъ:

$$\lg \operatorname{ctg} 86^0 54' 17'' = 8,7329998.$$

Этотъ логариѳмъ будетъ меньше настоящаго (§ 90), а потому его надо увеличить на число, соотвѣтствующее $0'',55$ *); означимъ это число буквою x. Разность между взятымъ логариѳмомъ 8,7329998 и ближайшимъ большимъ равна 390 десятимил., а разность между соотвѣтствующими углами равна $1''$; поэтому, на основаніи § 92, получимъ:

$$\frac{0'',55}{1''} = \frac{x}{390}\text{; откуда } x = 215 \text{ десятимил.}$$

И такъ

$$\begin{aligned} \lg \operatorname{ctg} 86^0 54' 17'' &= 8,7329998 \\ -0'',55 \quad & \quad +215 \\ \hline \lg \operatorname{ctg} 86^0 54' 16'',45 &= 8,7330213 - 10 \\ &= \overline{2},7330213. \end{aligned}$$

Примѣръ VI. Найти $\lg \cos 86^0 39' 48'',06$. Рѣшеніе (стр. 194):

$$\lg \cos 89^0 39' 48'', 06 = \overline{3},7699535.$$

§ 103. По данному логариѳму тригонометрической величины для угла, опредѣлить самый уголъ. *Примѣръ I.* Дано: $\lg \sin x = \overline{2},7313522$; опредѣлить x.

Для полученія табличнаго логариѳма, прибавимъ къ данному логариѳму 10; найдемъ: 8,7313522. Обращая сперва вниманіе на характеристику 8 и первые два десятичные знаки 7 и 3, ищемъ данный логариѳмъ на тѣхъ страницахъ, гдѣ написано sin; на

*) $86^0 54' 17'' - 86^0 54' 16'', 45 = 0'',55$.

страницѣ 248, на верху которой написано $\sin 3^0$, находимъ данный логариѳмъ; на верху столбца, гдѣ находится данный логариѳмъ, стоитъ $5'$, а въ горизонтальномъ ряду съ этимъ логариѳмомъ, на лѣвой сторонѣ страницы, стоитъ $17''$. Слѣдовательно $x = 3^0\,5'\,17''$.

Примѣръ II. Опредѣлить x, когда $\lg\cos x = \overline{3},9335428$.

Рѣш. На стран. 196 находимъ, что $x = 89^0\,30'\,30''$.

Примѣръ III. Дано: $\lg\operatorname{tg} x = \overline{2},6632000$; опредѣлить x.

Для полученія табличнаго логариѳма прибавимъ 10 къ данному; найдемъ: 8,6632000. Въ таблицѣ не находимъ такого логариѳма, а потому на стр. 241 беремъ ближайшій и меньшій логариѳмъ: 8,6631935, которому соотвѣтствуетъ $2^0\,38'\,11''$; онъ менѣе даннаго на 65 десятимилліонныхъ, а слѣдовательно и уголъ $2^0\,38'\,11''$ менѣе искомаго и потому его надо увеличить на число секундъ, соотвѣтствующихъ 65 десятимилліоннымъ; искомое число секундъ означимъ буквою y. Разность между ближайшимъ большимъ и ближайшимъ меньшимъ логариѳмами относительно даннаго равна: $8,6632393 - 8,6631935 = 0,0000458$ десятимил., а разность между соотвѣтствующими углами равна $1''$; на основаніи теоремы § 92, получимъ:

$$\frac{65}{485} = \frac{y''}{1''}; \text{ откуда } y'' = \frac{65''}{458} = 0'',14.$$

И такъ: $x = 2^0\,38'\,11'' + 0'',14 = 2^0\,38'\,11'',14$.

Примѣръ IV. $\lg\sin x = \overline{2},7188156$; опредѣлить x. Рѣш. (стр. 248): $x = 3^0\,0'',384$.

Примѣръ V. Дано: $\lg\cos x = \overline{2},8924268$; опредѣлить x.

Рѣшеніе (стр. 276):

$$\begin{array}{lll} \text{Ближ. больш.} & 439\ .\ .\ 85^0\,31'\,22'' & \\ \lg\cos x = 8,8924268 & & \text{Таб. разн. } 268. \\ \hline y'' \text{———} 171 & & \\ 1'' \text{———} 268; & & \end{array}$$

слѣдовательно

$$\frac{171}{268} = \frac{y''}{1''}; \text{ откуда } y'' = \frac{171''}{268} = 0'',638.$$

Итакъ $x = 85^0\,31'\,22'',638$.

Примѣръ VI. Дано: $\lg\operatorname{ctg} x = \overline{2},3118$; опредѣлить x. Рѣш. (стр. 211): $x = 88^0\,49'\,31'',715$.

Способы нахожденія логариѳмовъ синуса и тангенса для угловъ, близкихъ къ нулю, а также логариѳмовъ косинуса и котангенса для угловъ, близкихъ къ прямому.

§ 104. Когда уголъ близокъ къ нулю, то, при нахожденіи логариѳмовъ синуса и тангенса такого угла, употребленіе пропорціи, опредѣляющей поправку логариѳма тригонометрической величины для угла, не будетъ достаточно точнымъ даже и при пользованіи таблицею II; тоже можно замѣтить и о рѣшеніи обратнаго вопроса помощію этой таблицы. Сказанное нами относится также и до логариѳмовъ косинуса и котангенса для угловъ, близкихъ къ 90^0. Въ этихъ случаяхъ прибѣгаютъ къ другимъ пріемамъ, указаннымъ ниже.

§ 105. *Первый способъ.* Пусть ϑ означаетъ круговую мѣру угла въ n''; тогда получимъ (§ 74): $\vartheta = n \sin 1''$. Слѣдовательно

$$\lg \frac{\sin \vartheta}{\vartheta} = \lg \frac{\sin n''}{n \sin 1''} = \lg \sin n'' - \lg n - \lg \sin 1'';$$

откуда

$$\lg \sin n'' = \left(\lg \frac{\sin \vartheta}{\vartheta} + \lg \sin 1''\right) + \lg n; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

значитъ для опредѣленія $\lg \sin n''$ надо опредѣлить сумму: $\lg \frac{\sin \vartheta}{\vartheta} + \lg \sin 1''$ и къ ней придать $\lg n$.

Изъ (1) равенства можно также опредѣлить число секундъ въ углѣ, близкомъ нулю, когда данъ логариѳмъ синуса этого угла. Въ самомъ дѣлѣ изъ (1) равенства имѣемъ:

$$\lg n = \lg \sin n'' - \left(\lg \frac{\sin \vartheta}{\vartheta} + \lg \sin 1''\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Подобно этимъ равенствамъ можно получить и для тангенса:

$$\lg \operatorname{tg} n'' = \left(\lg \frac{\operatorname{tg} \vartheta}{\vartheta} + \lg \operatorname{tg} 1''\right) + \lg n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

и

$$\lg n = \lg \operatorname{tg} n'' - \left(\lg \frac{\operatorname{tg} \vartheta}{\vartheta} + \lg \operatorname{tg} 1''\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Суммы $\lg \frac{\sin \vartheta}{\vartheta} + \lg \sin 1''$ и $\lg \frac{\operatorname{tg} \vartheta}{\vartheta} + \lg \operatorname{tg} 1''$ вычислилъ французскій ученый *Деламбръ* для угловъ въ промежуткѣ отъ 0^0 до 3^0; эти суммы, расположенныя въ надлежащемъ порядкѣ, извѣстны подъ названіемъ *таблицъ Деламбра*.

§ 106. Таблицы Деламбра помѣщены внизу на каждой страницѣ I таблицы логариѳмовъ Вега и въ пятизначныхъ таблицахъ логариѳмовъ, изданныхъ мною, тоже внизу на каждой страницѣ I таблицы. Тамъ стоятъ числа секундъ, равныя соотвѣтствующимъ числамъ градусовъ, минутъ и се-

кундъ *) и рядомъ съ ними два столбца S и T, въ которыхъ помѣщены логариѳмы, въ семизначныхъ таблицахъ, съ семью десятичными знаками, а въ пятизначныхъ, съ пятью десятичными знаками, потому что первыя цифры 4,685 принадлежатъ всѣмъ логариѳмамъ перваго и втораго столбцовъ; гдѣ стоитъ S тамъ помѣщена сумма:

$$\lg \frac{\sin \vartheta}{\vartheta} + \lg \sin 1'', \text{ а гдѣ T — сумма } \lg \frac{\operatorname{tg} \vartheta}{\vartheta} + \lg \operatorname{tg} 1''.$$

Примѣръ I. Найти $\lg \sin 1^0 12' 48'',8$.

Внизу страницъ I таблицы ищемъ данный уголъ, а если его тамъ нѣтъ, то ближайшій; на стр. 73 находимъ ближайшій уголъ: $1^0 12' 50''$ и рядомъ съ нимъ въ столбцѣ S число 4,6855424. Кромѣ того тамъ-же видимъ, что $1^0 12' 40'' = 4360''$; слѣдовательно данный уголъ равенъ $4368'',8$. По формулѣ (1) получимъ (табличный логариѳмъ):

$\lg \sin 1^0 12' 48'',8 = 4{,}6855424 + \lg 4368{,}8 = 4{,}6855424 + 3{,}6403622 = 8{,}3259046$;

слѣдовательно $\lg \sin 1^0 12' 48'',8 = \bar{2}{,}3259046$.

Примѣръ II. Найти $\lg \operatorname{tg} 1' 16'',348$.

Внизу страницъ I таблицы ищемъ ближайшій уголъ къ $1'16'',348 = 76'',348$ и на стр. 2 находимъ ближайшій уголъ въ $100''$, которому въ столбцѣ T соотвѣтствуетъ: 4,6855749. По формулѣ (3) получимъ табличный логариѳмъ $\operatorname{tg} 1' 16'',348$, а именно:

$\lg \operatorname{tg} 1' 16'',348 = 4{,}6855749 + \lg 76{,}348 = 4{,}6855749 + 1{,}8827977 = 6{,}5683726$;

слѣдовательно

$$\lg \operatorname{tg} 1' 16'',348 = \bar{4}{,}5683726.$$

Примѣръ III. Найти $\lg \cos 89^0 42'',85$.

Имѣемъ (стр. 57): $\lg \cos 89^0 42'',85 = \lg \sin 59' 17'',15 = \bar{2}{,}2366555$.

Примѣръ IV. Опредѣлить $\lg \operatorname{ctg} 88^0 7' 36'',4$.

Имѣемъ (стр. 120): $\lg \operatorname{ctg} 88^0 7' 36'',4 = \lg \operatorname{tg} 1^0 52' 23'',6 = \bar{2}{,}5146213$.

Примѣръ V. $\lg \sin n'' = \bar{3}{,}1234567$; опредѣлить n.

Прибавивъ къ данному логариѳму 10, ищемъ въ III таблицѣ уголъ, котораго логариѳмъ синуса будетъ ближайшимъ къ данному логариѳму, и находимъ на 290 стр. $4'30'' = 270''$; смотримъ внизу страницъ I таблицы, въ столбцѣ S, число, соотвѣтствующее $270''$ (если нѣтъ $270''$, то беремъ ближайшее число секундъ) и находимъ (стр. 3): 4,6855748. Тогда, по (2) формулѣ, получаемъ: $\lg n = 7{,}1234567 - 4{,}6855748 = 2{,}4378819$; откуда $n = 274{,}083$; слѣдовательно искомый уголъ равенъ $274'',083 = 4'34'',083$.

Примѣръ VI. Дано: $\lg \operatorname{tg} n = \bar{2}{,}2427000$; опредѣлить n. Рѣш. (стр. 58): $n = 1^0 6'',459$.

---

*) Эти равенства служатъ для облегченія обращенія градусовъ, минутъ и секундъ въ секунды и обратно. Такъ, напр., если надо обратить $2^0 16' 47''$ въ секунды, то на стр. 150 находимъ, что $2^0 16' 40' = 8200''$, а потому $2^0 16' 47'' = 8207''$. Положимъ еще, напр., что надо превратить $6632''$ въ градусы, минуты и секунды; на стр. 118 находимъ, что $6630'' = 1^0 50' 30''$, а потому $6632'' = 1^0 50' 32''$.

Примѣръ VII. $\lg\cos n = \bar{2},2181679$; опредѣлить n. Сперва ищемъ уголъ n_1, для котораго $\lg\sin n_1 = \bar{2},2181679$; находимъ (стр. 55): $n_1 = 56'48'',888$ и тогда $n = 90^0 - n_1 = 89^0 3'11'',112$.

Примѣръ VIII. $\lg\operatorname{ctg} n = \bar{2},2646102$; опредѣлить n. Рѣш. (стр. 61): $n = 88^0 56'46'',968$.

§ 107. Надо замѣтить, что для $\frac{\sin\vartheta}{\vartheta}$ беремъ приближенную величину; а мы видѣли въ § 85, что когда ϑ мало, то $\frac{\sin\vartheta}{\vartheta}$ равенъ почти $1 - \frac{\vartheta^2}{6}$; слѣдовательно, если ϑ мало, то замѣна ϑ приближенною величиною не окажетъ вліяній на ту точность, съ которою производимъ вычисленіе, потому что $\lg\frac{\sin\vartheta}{\vartheta}$ измѣняется менѣе быстро нежели ϑ.

§ 108. Кромѣ указаннаго способа есть еще другой способъ, принадлежащій Маскелину (Maskelyne); онъ употребляется въ томъ случаѣ, когда нѣтъ таблицъ, указанныхъ въ предъидущихъ §§.

Въ IV отдѣлѣ имѣли, что при малой величинѣ ϑ,

$$\sin\vartheta = \vartheta - \frac{\vartheta^3}{6} \text{ и } \cos\vartheta = 1 - \frac{\vartheta^2}{2};$$

слѣдовательно

$$\frac{\sin\vartheta}{\vartheta} = 1 - \frac{\vartheta^2}{6} = \left(1 - \frac{\vartheta^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \text{ приблизительно}$$

или

$$\frac{\sin\vartheta}{\vartheta} = (\cos\vartheta)^{\frac{1}{3}} \text{ приблизительно};$$

откуда

$$\sin\vartheta = \vartheta\cos^{\frac{1}{3}}\vartheta.$$

Положимъ, что ϑ содержитъ n''; тогда (§ 74) $\vartheta = n\sin 1''$ и слѣдовательно

$$\sin n'' = n\sin 1''\cos^{\frac{1}{3}} n'';$$

откуда

$$\lg\sin n'' = \lg n + \lg\sin 1'' + \frac{1}{3}\lg\cos n'' \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

или

$$\lg n = \lg\sin n'' - \lg\sin 1'' - \frac{1}{3}\lg\cos n'' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Равенство (5) служитъ для опредѣленія логариѳма синуса даннаго угла, а равенство (6) — для рѣшенія обратнаго вопроса. Также замѣтимъ, что при малыхъ величинахъ n'', $\lg\cos n''$ измѣняются медленно, а потому употребленіе приближенной величины $\lg\cos n''$, при опредѣленіи $\lg\sin n''$ или $\lg n$, можетъ быть допущено.

Подобныя-же формулы можно получить и для тангенса:

$$\operatorname{tg}\vartheta=\frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta}=\left(\vartheta-\frac{\vartheta^3}{6}\right):\left(1-\frac{\vartheta^2}{2}\right)=\left(\vartheta-\frac{\vartheta^3}{6}\right)\left(1-\frac{\vartheta^2}{2}\right)^{-1}$$

$$=\left(\vartheta-\frac{\vartheta^3}{6}\right)\left(1+\frac{\vartheta^2}{2}\right) \text{ приблизительно,}$$

или

$$\frac{\operatorname{tg}\vartheta}{\vartheta}=\left(1-\frac{\vartheta^2}{6}\right)\left(1+\frac{\vartheta^2}{2}\right)=1+\frac{\vartheta^2}{3} \text{ приблиз.}$$

или

$$\frac{\operatorname{tg}\vartheta}{\vartheta}=\left(1-\frac{\vartheta^2}{2}\right)^{-\frac{2}{3}}=(\cos\vartheta)^{-\frac{2}{3}} \text{ приблиз.;}$$

отсюда

$$\operatorname{tg}\vartheta=\vartheta(\cos\vartheta)^{-\frac{2}{3}}.$$

Положимъ, что ϑ содержитъ n''; тогда (§ 74) $\vartheta=n\operatorname{tg}1''$ и

$$\operatorname{tg}n''=n\operatorname{tg}1''(\cos n'')^{-\frac{2}{3}};$$

откуда

$$\lg\operatorname{tg}n''=\lg n+\lg\operatorname{tg}1''-{}^2/_3\lg\cos n'' \text{ *)} \qquad (7)$$

или

$$\lg n=\lg\operatorname{tg}n''-\lg\operatorname{tg}1''+{}^2/_3\lg\cos n''. \qquad (8)$$

Примѣръ I. Найти $\lg\sin 16'4'',64$.

По формулѣ (5) получимъ табличный логариѳмъ:

$\lg\sin 16'4'',64=\lg\sin 964'',64=\lg 964,64+\lg\sin 1''+{}^1/_3\lg\cos 16'4'',64=$
$=2,9843653+4,6855749+\bar{1},9999984=7,6699386.$

Примѣръ II. $\lg\operatorname{tg}n''=\bar{2},2427000$; опредѣлить n.

Табличный $\lg\operatorname{tg}n''=8,2427000$ и потому, по формулѣ (8), получимъ:

$$\lg n=8,2427000-4,6855749+{}^2/_3\cdot\bar{1},9999335=3,5570808; \text{**)}$$

откуда $n=3606,457$; слѣдовательно искомый уголъ равенъ $3606'',457=$ $=1^0 6'',457$.

Примѣръ III. $\lg\sin x=\bar{3},0825217$; опредѣлить x.

По формулѣ (6) получимъ:

$$\lg x=7,0825217-4,6855749-{}^1/_3\cdot\bar{1},9999997=2,3969469;$$

откуда $x=249'',49=4'9'',49$.

Примѣръ IV. $\lg\operatorname{ctg}x=\bar{2},2745532$; опредѣлить x.

Ищемъ уголъ α, для котораго $\lg\operatorname{tg}\alpha=\bar{2},2745532$, и находимъ: $\alpha=1^0 4'40'',852$; откуда $x=90^0-\alpha=88^0 55'19'',148$.

---

*) Табличный $\lg\sin 1''=\lg\operatorname{tg}1''=4,6855749$.

**) $\lg\cos n''$ опредѣляемъ приближенно такъ: смотримъ въ таблицѣ логариѳ. тригон. величинъ, въ столбцѣ tang, ближайшій логариѳмъ къ данному; затѣмъ идемъ вправо по горизонтальному ряду и въ столбцѣ cos находимъ приближенную величину $\lg\cos n''$.

§ 109. Этотъ отдѣлъ закончимъ рѣшеніемъ нѣсколькихъ примѣровъ на вычисленіе.

Примѣръ I. Опредѣлить x изъ уравненія:

$$\operatorname{ctg} x = \sqrt[48]{\sin 76^0\, 19'\, 39'',46}.$$

Имѣемъ:

$$\lg \operatorname{ctg} x = \frac{\lg \sin 76^0\, 19'\, 39'',46}{48};$$

но $\lg \sin 76^0\, 19' 39'',46 = \overline{1},9875157$, а потому

$$\lg \operatorname{ctg} x = \frac{\overline{1},9875157}{48} \text{ или } \lg \operatorname{ctg} x = \overline{1},9997399;$$

откуда, подыскавъ въ таблицѣ логариѳмовъ тригонометрическихъ величинъ уголъ x, соотвѣтствующій найденному логариѳму, получимъ:

$$x = 45^0\, 1'\, 1'',76.$$

Примѣръ II. Опредѣлить величину дроби: $\dfrac{\sqrt[17]{0,0728648}}{(\operatorname{tg} 42^0\, 43'',06)^{-0,42}}$.

Означивъ буквою x величину искомой дроби, найдемъ:

$$\lg x = \frac{\lg 0,0728648}{17} + 0,42 \lg \operatorname{tg} 42^0\, 43'',06;$$

но $\lg 0,0728648 = \overline{2},8625178$, $\qquad \lg \operatorname{tg} 42^0\, 43'',06 = \overline{1},9546197$,

$\frac{1}{17} \lg 0,0728648 = \overline{1},9330893$, $\;0,42 \lg \operatorname{tg} 42^0\, 43'',06 = -0,0190597$,

а потому

$$\lg x = \overline{1},9330893 - 0,0190597$$

или

$$\lg x = \overline{1},9140296; \text{ откуда } x = 0,8204075.$$

Примѣръ III. Найти x изъ уравненія:

$$\sin x = \frac{1,6 - (\operatorname{tg} 52^0\, 4'\, 8'',7)^{-\frac{12}{25}}}{\sqrt[45]{0,8\,(\cos 36^0\, 18'\, 37'')^{1,6}}}.$$

Въ числителѣ находится разность, а потому прежде всего найдемъ величину этой разности; для этого опредѣлимъ сначала величину вычитаемаго: $(\operatorname{tg} 52^0\, 4'\, 8'',7)^{-\frac{12}{25}}$, такъ какъ уменьшаемое 1,6 есть число извѣстное.

Положивъ:

$$(\operatorname{tg} 52^0\, 4'\, 8'',7)^{-\frac{12}{25}} = y,$$

найдемъ:

$$\lg y = -\tfrac{12}{25} \lg \operatorname{tg} 52^0\, 4'\, 8'',7;$$

но $\lg \operatorname{tg} 52^0\, 4'\, 8'',7 = 0{,}1082699$, а потому

$$\lg y = -\tfrac{12}{25} .\ 0{,}1082699 = -0{,}48 . 0{,}1082699 = -0{,}051969552$$

или

$$\lg y = \bar{1}{,}9480304;$$

откуда

$$y = 0{,}8872182.$$

Слѣдовательно

$$\sin x = \frac{1{,}6 - 0{,}8872182}{\sqrt[45]{0{,}8 (\cos 36^0\, 18'\, 37'')^{1{,}6}}} \text{ или } \sin x = \frac{0{,}7127818}{\sqrt[45]{0{,}8 (\cos 36^0\, 18'\, 37'')^{1{,}6}}},$$

а $\lg \sin x = \lg 0{,}7127818 - \frac{1}{45} (\lg 0{,}8 + 1{,}6 \lg \cos 36^0\, 18'\, 37'')$.

Имѣемъ:

$$\begin{array}{r|l} \lg 0{,}7127818 = \bar{1}{,}8529566 & \frac{1}{45} . \bar{1}{,}7530727 = \bar{1}{,}9945127; \\ \lg \cos 36^0\, 18'\, 37'' = \bar{1}{,}9062392 & \\ \hline 1{,}6 \lg \cos 36^0\, 18'\, 37'' = \bar{1}{,}8499827 & \\ + \lg 0{,}8 = \bar{1}{,}9030900 & \\ \hline \bar{1}{,}7530727 & \end{array}$$

поэтому

$$\lg \sin x = \bar{1}{,}8529566 - \bar{1}{,}9945127$$

или

$$\lg \sin x = \bar{1}{,}8584439; \text{ откуда } x = 46^0\, 12'\, 25'',25.$$

Примѣръ IV. Вычислить: $\operatorname{tg} \cos 46^0\, 17''$.

Означимъ величину $\operatorname{tg} \cos 46^0\, 17''$ буквою x и найдемъ сперва величину $\cos 46^0\, 17''$; имѣемъ:

$$\lg \cos 46^0\, 17'' = \bar{1}{,}8417342; \text{ откуда } \cos 46^0\, 17'' = 0{,}6945990.$$

Выразивъ число 0,6945990 въ градусахъ, какъ показано въ § 14, найдемъ: $39^0\, 47'\, 51'',33$; слѣдовательно:

$$x = \operatorname{tg} 39^0\, 47'\, 51'',33, \text{ а } \lg x = \bar{1}{,}9206958;$$

откуда $x = 0,8330975$. И такъ

$$\operatorname{tg}\cos 46^{0}\,17'' = 0,8330975.$$

Примѣръ V. Вычислить: $x = \sqrt[100]{\operatorname{ctg}\left(\sin\frac{2}{\pi}\right)^{-0,05}}$.

Прежде всего найдемъ величину дроби: $\frac{2}{\pi}$ и выразимъ ее въ градусахъ; получимъ:

$$\frac{2}{\pi} = 0,6366197 = 36^{0}\,28'\,32'',25;$$

тогда

$$y = \left(\sin\frac{2}{\pi}\right)^{-0,05} = \left(\sin 36^{0}\,28'\,32'',25\right)^{-0,05},$$

а $\lg y = -0,05\,.\,\lg\sin 36^{0}\,28'\,32'',25 = 0,0112931;$

откуда

$$y = 1,0263444.$$

Выразивъ найденную дугу: 1,0263444 въ градусахъ, получимъ: $y = 58^{0}\,48'\,18'',72$ и

$$x = \sqrt[100]{\operatorname{ctg} 58^{0}\,48'\,18'',72};$$

откуда x уже легко опредѣлить. Окончательный результатъ: $x = 0,9949955$.

Примѣръ VI. Найти $\left(\sqrt[16]{0,08}\right)^{\cos 0,01}$.

Выразивъ 0,01 въ градусахъ, получимъ: $0,01 = 34'\,22'',64$ и

$$x = \left(\sqrt[16]{0,08}\right)^{\cos 34'\,22'',64};$$

откуда

$$\lg x = \cos 34'\,22'',64\,.\,\frac{\lg 0,08}{16} = \cos 34'\,22'',64\,.\,-\frac{1,09691}{16};$$

перемѣнивъ въ обѣихъ частяхъ знаки на обратные, найдемъ:

$$-\lg x = \cos 34'\,22'',64\,.\,\frac{1,09691}{16} \text{ и}$$

$$\lg(-\lg x) = \lg\cos 34'\,22'',64 + \lg 1,09691 - \lg 16 = \overline{2},8360292.$$

Отыскавъ соотвѣтствующее число полученному логариѳму, найдемъ:

$$-\lg x = 0,0685534, \text{ или } \lg x = -0,0685534$$

или

$$\lg x = \overline{1},9314466;$$

откуда $x = \left(\sqrt[16]{0,08}\right)^{\cos 0,01} = 0,8539779.$

ОТДѢЛЪ VII.

Приведеніе формулъ къ виду, удобному для логариѳмическихъ вычисленій. — Рѣшеніе уравненій второй и третьей степени съ однимъ неизвѣстнымъ помощію тригонометрическихъ таблицъ.

§ 110. Приведеніе формулъ къ виду, удобному для логариѳмическихъ вычисленій. Въ алгебрѣ видѣли, что, при опредѣленіи по логариѳмамъ численной величины выраженій, можно логариѳмировать непосредственно только тѣ изъ нихъ, которыя не содержатъ суммы или разности. Съ помощію тригонометрическихъ величинъ можно привести формулу, содержащую сумму или разность, къ виду, удобному для логариѳмическаго вычисленія, т. е. къ такому, гдѣ входятъ дѣйствія умноженія, дѣленія, возвышенія въ степень и извлеченія корня; это можно сдѣлать или чрезъ непосредственное преобразованіе самыхъ формулъ, какъ видѣли въ § 54, или чрезъ *введеніе вспомогательнаго угла.* Какъ должно поступать для приведенія формулъ помощію тригонометрическихъ величинъ къ виду, удобному для логариѳмическихъ вычисленій, увидимъ изъ приведенныхъ ниже примѣровъ.

Примѣръ I. Привести выраженіе: $\cos 46^0 + \cos 30^0$ къ виду, удобному для логариѳмическаго вычисленія.

Въ § 54 имѣли:

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}.$$

Положивъ здѣсь: $a = 46^0$ и $b = 30^0$, найдемъ, что

$$\cos 46^0 + \cos 30^0 = 2 \cos 38^0 \cos 8^0.$$

Примѣръ II. Привести выраженіе: $\sin\alpha + \cos\alpha$ къ виду, удобному для логариѳмическаго вычисленія.

Такъ какъ $\cos\alpha = \sin(90^0 - \alpha)$, то (§ 54)

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \sin\alpha + \sin(90^0 - \alpha) =$$

$$= 2\sin\frac{\alpha + 90^0 - \alpha}{2}\cos\frac{\alpha - 90^0 + \alpha}{2} = 2\sin 45^0 \cos(\alpha - 45^0)$$

$$= 2\sqrt{\tfrac{1}{2}}\cos(\alpha - 45^0) = \sqrt{2}\cos(\alpha - 45^0).$$

Примѣръ III. Привести алгебраическую сумму двухъ какихъ-либо чиселъ къ виду, удобному для ея логариѳмическаго вычисленія.

Пусть a и b два какія-либо числа; тогда

$$x = a + b = a\left(1 + \frac{b}{a}\right).$$

Положивъ $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$, найдемъ:

$$x = a(1 + \operatorname{tg}\varphi) = a\left(1 + \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\right) = \frac{a(\sin\varphi + \cos\varphi)}{\cos\varphi};$$

но (прим. II) $\sin\varphi + \cos\varphi = \sqrt{2}\cos(\varphi - 45^0)$, а потому

$$x = \frac{a\sqrt{2}\cos(\varphi - 45^0)}{\cos\varphi}.$$

Если-же намъ извѣстно, какое изъ чиселъ a и b положительное или отрицательное, то приведеніе можно сдѣлать проще. Напримѣръ, если a и b будутъ числа положительныя, то

$$x = a + b = a\left(1 + \frac{b}{a}\right),$$

гдѣ положивъ $\frac{b}{a} = \operatorname{tg}^2\varphi$, найдемъ:

$$x = a(1 + \operatorname{tg}^2\varphi) = a\sec^2\varphi = \frac{a}{\cos^2\varphi}.$$

Если $x = a - b$, гдѣ a и b числа положительныя и $a > b$, то, положивъ $\frac{b}{a} = \cos^2\varphi$, найдемъ:

$$x = a\left(1 - \frac{b}{a}\right) = a(1 - \cos^2\varphi) = a\sin^2\varphi.$$

Примѣръ IV. Привести выраженіе: $a\cos\alpha \pm b\sin\alpha$ къ виду, удобному для логариѳмическаго вычисленія.

Имѣемъ:

$x = a\cos\alpha \pm b\sin\alpha = a\left(\cos\alpha \pm \frac{b}{a}\sin\alpha\right)$; положивъ $\frac{b}{a} = \mathrm{tg}\,\varphi$, найдемъ:

$$x = a(\cos\alpha \pm \mathrm{tg}\,\varphi\sin\alpha) = a\left(\cos\alpha \pm \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\sin\alpha\right)$$

$$= \frac{a(\cos\alpha\cos\varphi \pm \sin\alpha\sin\varphi)}{\cos\varphi} = \frac{a\cos(\alpha \mp \varphi)}{\cos\varphi}.$$

Примѣръ V. Даны A, α и δ; опредѣлить φ изъ уравненія: $\sin A = \cos\varphi\cos\alpha\cos\delta + \sin\varphi\sin\delta$. Имѣемъ:

$$\sin A = \sin\delta(\sin\varphi + \cos\varphi\,.\,\cos\alpha\,\mathrm{ctg}\,\delta);$$

положивъ: $\mathrm{tg}\,\psi = \cos\alpha\,\mathrm{ctg}\,\delta$, . . (1), найдемъ:

$$\sin A = \sin\delta\left(\sin\varphi + \cos\varphi\,.\,\frac{\sin\psi}{\cos\psi}\right) = \frac{\sin\delta\,.\,\sin(\varphi + \psi)}{\cos\psi}\;.\;.\;(2)$$

Изъ (1) уравненія опредѣлимъ ψ, а изъ (2) уравненія $\varphi + \psi$, а слѣдовательно и φ.

Примѣръ VI. Рѣшить уравненіе:

$$25\sin\vartheta + 32\cos\vartheta = 10.$$

Раздѣлимъ всѣ члены уравненія на 25 и положимъ $\frac{32}{25} = \mathrm{tg}\,\varphi$; найдемъ:

$$\sin\vartheta + \mathrm{tg}\,\varphi\cos\vartheta = 0{,}4$$

или

$$\sin\vartheta + \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\cos\vartheta = 0{,}4 \text{ или } \frac{\sin(\vartheta + \varphi)}{\cos\varphi} = 0{,}4;$$

откуда

$$\sin(\vartheta + \varphi) = 0{,}4\cos\varphi.$$

Вычисленіе угла φ.

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{32}{25}$$

$\lg 32 = 1{,}5051500$

$\lg 25 = 1{,}3979400$

$\lg\mathrm{tg}\,\varphi = 0{,}1072100$

$\varphi = 52^0\,4'',562$

Вычисленіе угла ϑ.

$$\sin(\vartheta + \varphi) = 0{,}4\cos\varphi$$

$\lg 0{,}4 = \bar{1}{,}6020600$

$\lg\cos\varphi = \bar{1}{,}7893297$

$\lg\sin(\vartheta + \varphi) = \bar{1}{,}3913897$

$\vartheta + \varphi = 14^0 15' 22'',218$

$\vartheta = -37^0 44' 42'',344.$

Примѣръ VII. Привести формулу: $1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$ изъ виду, удобному для логариѳмическаго вычисленія.

Придадимъ и вычтемъ изъ данной формулы по $\cos^2\beta\cos^2\gamma$; найдемъ:

$$x = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma +$$
$$+ \cos^2\beta\cos^2\gamma - \cos^2\beta\cos^2\gamma =$$
$$= 1 - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + \cos^2\beta\cos^2\gamma - (\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma)^2$$
$$= \sin^2\beta - \cos^2\gamma\,(1 - \cos^2\beta) - (\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma)^2$$
$$= \sin^2\beta - \cos^2\gamma\sin^2\beta - (\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma)^2$$
$$= \sin^2\beta\,(1 - \cos^2\gamma) - (\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma)^2$$
$$= \sin^2\beta\sin^2\gamma - (\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma)^2$$
$$= [\sin\beta\sin\gamma + \cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma][\sin\beta\sin\gamma - \cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma].$$
$$= [\cos\alpha - \cos(\beta+\gamma)]\,[\cos(\beta-\gamma) - \cos\alpha].$$

Но разность косинусовъ можно представить въ видѣ произведенія (§ 54); поэтому

$$x = -2\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha-\beta-\gamma}{2}\cdot -2\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\sin\frac{\beta-\gamma-\alpha}{2}$$
$$= 4\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}.$$

Положивъ $\alpha+\beta+\gamma = 2\varsigma$, найдемъ:

$$x = 4\sin\varsigma\sin(\varsigma-\alpha)\sin(\varsigma-\beta)\sin(\varsigma-\gamma).$$

§ 111. Рѣшеніе уравненій второй степени съ однимъ неизвѣстнымъ помощію тригонометрическихъ таблицъ. Корни квадратнаго уравненія

$$x^2 + px + q = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

суть:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$-\frac{p}{2} \pm \sqrt{-q}\sqrt{1-\frac{p^2}{4q}}$

Предположимъ, что p и q будутъ числа дѣйствительныя и разберемъ здѣсь три случая:

$\sqrt{q}\left(-\frac{p}{2\sqrt{q}} \pm \sqrt{-1}\cdot\sqrt{1-\frac{p^2}{4q}}\right)$

1) Число q положительное и $\frac{p^2}{4} - q > 0$.

Тогда, взявъ во второй части (2) равенства $\frac{p}{2}$ за скобку множителемъ, получимъ:

$$x = \frac{p}{2}\left(-1 \pm \sqrt{1 - \frac{4q}{p^2}}\right);$$

а такъ какъ, по условію, $\frac{p^2}{4} > q$ или $p^2 > 4q$, то дробь $\frac{4q}{p^2} < 1$; поэтому положимъ:

$$\frac{4q}{p^2} = \sin^2\varphi; \text{ откуда } \sin\varphi = \frac{2\sqrt{q}}{p}.$$

Слѣдовательно

$$x = \frac{p}{2}\left(-1 \pm \sqrt{1-\sin^2\varphi}\right) = \frac{p}{2}(-1 \pm \cos\varphi). \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Изъ равенства $\sin\varphi = \frac{2\sqrt{q}}{p}$, найдемъ: $p = \frac{2\sqrt{q}}{\sin\varphi}$ и, подставивши въ (3) равенство вмѣсто p его величину, получимъ:

$$x = \frac{\sqrt{q}}{\sin\varphi}(-1 \pm \cos\varphi) = -\sqrt{q}.\frac{1 \mp \cos\varphi}{\sin\varphi};$$

отсюда (§ 57)

$$x_1 = -\sqrt{q}.\frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi} = -\sqrt{q}.\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2},\ x_2 = -\sqrt{q}.\frac{1+\cos\varphi}{\sin\varphi} = -\sqrt{q}.\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}.$$

2) Число q положительное и $\frac{p^2}{4} - q < 0$.

Въ этомъ случаѣ, изъ (2) равенства, получимъ:

$$x = \sqrt{q}\left(-\frac{p}{2\sqrt{q}} \pm \sqrt{-1}.\sqrt{1-\frac{p^2}{4q}}\right);$$

положивъ $\frac{p^2}{4q} = \cos^2\varphi$, найдемъ, что $\frac{p}{2\sqrt{q}} = \cos\varphi$ и

$$x = \sqrt{q}\left(-\cos\varphi \pm \sqrt{-1}.\sqrt{1-\cos^2\varphi}\right)$$

или

$$x = \sqrt{q}\left(-\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1}\right).$$

3) q отрицательное. Возьмемъ за скобку $\frac{p}{2}$ во второй части (2) равенства; получимъ:

$$x = \frac{p}{2}\left(-1 \pm \sqrt{1-\frac{4q}{p^2}}\right).$$

Положивъ: $-\frac{4q}{p^2} = \operatorname{tg}^2\varphi$, найдемъ, что $\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\sqrt{-q}}{p}$ и

$$x = \frac{p}{2}\left(-1 \pm \sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}\right) = \frac{p}{2}\left(-1 \pm \frac{1}{\cos\varphi}\right) = \frac{p}{2}.\frac{-\cos\varphi \pm 1}{\cos\varphi};$$

изъ равенства же $\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\sqrt{-q}}{p}$, найдемъ: $p = \frac{2\sqrt{-q}}{\operatorname{tg}\varphi} = \frac{2\sqrt{-q}.\cos\varphi}{\sin\varphi}$, а потому

$$x = \sqrt{-q}\ .\ \frac{-\cos\varphi \pm 1}{\sin\varphi};$$

откуда

$$x_1 = \sqrt{-q}.\frac{-\cos\varphi+1}{\sin\varphi} = \sqrt{-q}.\frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi} = \sqrt{-q}.\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$$

и

$$x_2 = \sqrt{-q}.\frac{-\cos\varphi-1}{\sin\varphi} = -\sqrt{-q}.\frac{1+\cos\varphi}{\sin\varphi} = -\sqrt{-q}.\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}.$$

Примѣръ. Рѣшить уравненіе:

$$x^2 + 0{,}56487\,x + 0{,}02564 = 0.$$

Здѣсь $p = 0{,}56487$, $q = 0{,}02564$ и $\frac{p^2}{4} - q > 0$, а потому здѣсь имѣетъ мѣсто первый случай; положивъ $\sin\varphi = \frac{2\sqrt{q}}{p}$, найдемъ:

$$x_1 = -\sqrt{q}\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2} \text{ и } x_2 = -\sqrt{q}.\,\mathrm{ctg}\,\frac{\varphi}{2}.$$

Ходъ вычисленій.

$$\lg\sin\varphi = \lg 2 + \frac{\lg q}{2} - \lg p = 0{,}3010300 + \overline{1},2044590 + 0{,}2480515$$
$$= \overline{1},7535405;\ \varphi = 34^0 32' 14'',738.$$

Вычисленіе корня x_1.

$$\frac{\lg q}{2} = \overline{1},2044590$$
$$\lg\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2} = \overline{1},4925738$$
$$\lg(-x_1) = \overline{2},6970328$$
$$-x_1 = 0{,}0497775$$
$$x_1 = -0{,}0497775.$$

Вычисленіе корня x_2.

$$\frac{\lg q}{2} = \overline{1},2044590$$
$$-\lg\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2} = 0{,}5074262$$
$$\lg(-x_2) = \overline{1},7118852$$
$$-x_2 = 0{,}5150925$$
$$x_2 = -0{,}5150925.$$

ПОВѢРКА.

$$x_1 = -0{,}0497775$$
$$x_2 = -0{,}5150925$$
$$x_2 = -0{,}5648700$$

$$\lg(-x_1) = \overline{2},6970328$$
$$\lg(-x_2) = \overline{1},7118852$$
$$\lg(x_1 x_2) = \overline{2},4089180$$
$$x_1 x_2 = 0{,}02564.$$

§ 112. Рѣшеніе уравненій третьей степени съ однимъ неизвѣстнымъ помощію тригонометрическихъ таблицъ. Уравненіе третьей степени съ однимъ неизвѣстнымъ можетъ быть приведено къ виду:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0;$$

раздѣливъ обѣ части уравненія на a, получимъ:

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0,$$

а подставивъ въ немъ $y - \frac{b}{3a}$ вмѣсто x, придемъ къ уравненію:

$$y^3 + py + q = 0.$$

Слѣдов. полное уравненіе третьей степени можно привести къ виду:

$$x^3 + px + q = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Рѣшимъ это уравненіе, когда p и q будутъ дѣйствительныя числа. Въ § 66 видѣли, что уравненіе:

$$\cos^3\frac{\varphi}{3} - \frac{3}{4}\cos\frac{\varphi}{3} - \frac{\cos\varphi}{4} = 0$$

или, положивъ $\cos\frac{\varphi}{3}=y$, уравненіе:

$$y^3-\frac{3}{4}y-\frac{\cos\varphi}{4}=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

имѣетъ три корня:

$$y=\cos\frac{\varphi}{3}, \quad y=\cos\frac{2\pi+\varphi}{3} \text{ и } y=\cos\frac{2\pi-\varphi}{3}; \quad . \quad (6)$$

поэтому, если будетъ возможно привести (4) уравненіе къ виду (5), то тогда легко найти корни (4) уравненія. Для приведенія (4) уравненія къ виду (5), положимъ въ (4) уравненіи $x=ny$; тогда найдемъ:

$$n^3y^3+npy+q=0 \text{ или } y^3+\frac{p}{n^2}y+\frac{q}{n^3}=0;$$

чтобы это уравненіе было тождественно съ (4), необходимо опредѣлить n и φ такъ, чтобы

$$\frac{p}{n^2}=-\frac{3}{4} \text{ и } \frac{q}{n^3}=-\frac{\cos\varphi}{4};$$

Изъ перваго равенства имѣемъ: $n=\pm 2\sqrt{-\frac{p}{3}}$ и, взявъ для n положительное значеніе, найдемъ изъ втораго равенства, что

$$\cos\varphi=-\frac{q}{2}:\sqrt{\left(-\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Величины для n и φ будутъ очевидно возможны только при p отрицательномъ и при условіи, чтобы

$$-\frac{q}{2}<\sqrt{\left(-\frac{p}{3}\right)^3} \text{ или } -\frac{q}{2}=\sqrt{\left(-\frac{p}{3}\right)^3}, \quad . \quad . \quad (7)$$

потому что $\cos\alpha<1$ или, въ частномъ случаѣ, равенъ 1.

Упростимъ (7) выраженія; для этого, въ каждомъ изъ этихъ выраженій, возвысимъ обѣ части въ квадратъ и перенесемъ члены въ первую часть; найдемъ:

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0 \text{ или } \frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

отсюда видимъ, что для существованія этихъ условій, необходимо, чтобы p было отрицательнымъ, потому что въ противномъ случаѣ величины первыхъ частей были бы положительными; слѣдовательно, условіе: $p<0$ входитъ въ предъидущія условія. И такъ, чтобы возможно было сдѣлать указанныя преобразованія, другими словами, чтобы корни (4) уравненія были дѣйствительные, необходимо имѣть или

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0 \text{ или } \frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=0.$$

Мы положили $x=ny$; слѣдовательно изъ (6) равенствъ получимъ:

$$x_1=2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\varphi}{3}, \; x_2=2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{2\pi+\varphi}{3} \text{ и } x_3=2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{2\pi-\varphi}{3},$$

гдѣ φ опредѣлится изъ равенства:

$$\cos\varphi = -\frac{q}{2} : \sqrt{\left(-\frac{p}{3}\right)^3}.$$

При условіи $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=0$, $\cos\varphi=1$ и $\varphi=0$; тогда

$$x_1=2\sqrt{-\frac{p}{3}},\ x_2=2\sqrt{-\frac{p}{3}}.\cos\frac{2\pi}{3} \text{ и } x_3=2\sqrt{-\frac{p}{3}}.\cos\frac{2\pi}{3};$$

откуда видимъ, что, при этимъ условіи, кубичное уравненіе: $x^3+px+q=0$ имѣетъ два равныхъ корня.

Численный примѣръ. Рѣшить уравненіе: $x^3-6x-2=0$.

Здѣсь $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=\frac{(-2)^2}{4}+\frac{(-6)^3}{27}=1-8=-7<0$;

слѣдовательно корни этого уравненія дѣйствительные и равны:

$$x_1=\sqrt{8}\cos\frac{\varphi}{3},\ x_2=\sqrt{8}.\cos\left(120^0+\frac{\varphi}{3}\right)=-\sqrt{8}\sin\left(30^0+\frac{\varphi}{3}\right)$$

и $x_3=\sqrt{8}\cos\left(120^0-\frac{\varphi}{3}\right)=-\sqrt{8}\sin\left(30^0-\frac{\varphi}{3}\right)$, гдѣ $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{8}}$.

Вычисленіе угла φ.

$$\lg\cos\varphi=-\frac{\lg 8}{2}$$

или $\lg\cos\varphi=\bar{1},5484550$

$\varphi=69^0 17' 42'',675$

$\frac{\varphi}{3}=23^0 5' 54'',225$

Вычисленіе x_1.

$\frac{\lg 8}{2}=0,4515450$

$\lg\cos\frac{\varphi}{3}=\bar{1},9637087$

$\lg x_1=0,4152537$

$x_1=2,601679$

Вычисленіе x_2.

$\frac{\lg 8}{2}=0,4515450$

$\lg\sin\left(30^0+\frac{\varphi}{3}\right)=\bar{1},9029097$

$\lg(-x_2)=0,3544547$

$x_2=-2,261803.$

Вычисленіе x_3.

$\frac{\lg 8}{2}=0,4510450$

$\lg\sin\left(30^0-\frac{\varphi}{3}\right)=\bar{1},0797767$

$\lg(-x_3)=\bar{1},5313217$

$x_3=-0,339877.$

§ 113. Разсмотримъ случаи, когда уравненіе (4) имѣетъ мнимые корни. Корни (4) уравненія, какъ извѣстно изъ алгебры, будутъ:

$$x_1=m+n,\ x_2=\alpha m+\beta n \text{ и } x_3=\beta m+\alpha n, \ldots\ldots\ldots(9)$$

гдѣ

$$m=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}},\ n=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}},$$

$$\alpha=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \text{ и } \beta=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$

Условіе, чтобы (4) уравненіе имѣло мнимые корни, есть слѣдующее:

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}>0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

1-ый случай. p отрицательное число. Изъ условія (10) имѣемъ: $\frac{q^2}{4} > -\frac{p^3}{27}$ а потому можно положить, что

$$-\frac{p^3}{27} = \frac{q^2}{4}\sin^2\omega \text{ или } \sqrt{-\frac{p^3}{27}} = \frac{q}{2}\sin\omega; \quad . \; . \; . \quad (11)$$

тогда

$$m = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \frac{q}{2}\cos\omega} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}(1-\cos\omega)} = \sqrt[3]{-q\sin^2\frac{\omega}{2}}$$

и

$$n = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \frac{q}{2}\cos\omega} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}(1+\cos\omega)} = \sqrt[3]{-q\cos^2\frac{\omega}{2}};$$

Изъ (11) равенства: $q = \frac{2}{\sin\omega}\sqrt{-\frac{p^3}{27}}$; слѣдовательно

$$m = \sqrt[3]{-\frac{2}{\sin\omega}\cdot\sqrt{-\frac{p^3}{27}}.\sin^2\frac{\omega}{2}} = \sqrt{-\frac{p}{3}}\cdot\sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}}$$

и

$$n = \sqrt[3]{-\frac{2}{\sin\omega}\cdot\sqrt{-\frac{p^3}{27}}.\cos^2\frac{\omega}{2}} = \sqrt{-\frac{p}{3}}\cdot\sqrt[3]{\operatorname{ctg}\frac{\omega}{2}};$$

если положимъ: $\sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}} = \operatorname{tg}\varphi$, то найдемъ изъ (9) равенствъ:

$$x_1 = \sqrt{-\frac{p}{3}}(\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{ctg}\varphi) = \sqrt{-\frac{p}{3}}\cdot\frac{2}{\sin 2\varphi},$$

$$_2x_3 = -\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{p}{3}}(\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{ctg}\varphi) \pm \sqrt{-1}.\sqrt{-p}\,(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{ctg}\varphi)$$

$$= -\frac{1}{\sin 2\varphi}\sqrt{-\frac{p}{3}} \pm \sqrt{-1}.\sqrt{-p}.\operatorname{ctg}2\varphi.$$

Слѣдовательно, для опредѣленія корней уравненія, ищемъ сперва ω изъ равенства: $\sin\omega = \frac{2}{q}\sqrt{-\frac{p^3}{27}}$; потомъ φ изъ уравненія: $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}}$ и наконецъ уже x_1, x_2 и x_3 по формуламъ:

$$x_1 = \sqrt{-\frac{p}{3}}\cdot\frac{2}{\sin 2\varphi}$$

и

$$_2x_3 = -\sqrt{-\frac{p}{3}}\cdot\frac{1}{\sin 2\varphi} \pm \sqrt{-1}.\sqrt{-p}.\operatorname{ctg}2\varphi.$$

Численный примѣръ. Рѣшить уравненіе $x^3 - x + 4 = 0$.

Вычисленіе угла ω.

$$\sin\omega = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{27}} = \frac{1}{2\sqrt{27}}$$

$$\lg 2 = 0{,}3010300$$

$$\frac{\lg 27}{2} = 0{,}7156819$$

$$\lg \sin\omega = \overline{2}{,}9832881$$

$$\omega = 5^0 31' 17'',596$$

$$\frac{\omega}{2} = 2^0 45' 39'',298$$

Вычисленіе $\sqrt{-p}\,\mathrm{ctg}\,2\varphi =$

$= \mathrm{ctg}\, 40^0 7'',054$

$$\lg \mathrm{ctg}\, 40^0 7'',054 = 0{,}0761563$$

$$\mathrm{ctg}\, 40^0 7'',054 = 1{,}1916709$$

Вычисленіе угла φ.

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \sqrt[3]{\mathrm{tg} 2^0 45' 39'',298}$$

$$\frac{\lg \mathrm{tg}\, 2^0 45' 39'',298}{3} = \frac{\overline{2}{,}6832669}{3}$$

$$\lg \mathrm{tg}\,\varphi = \overline{1}{,}5610890$$

$$\varphi = 20^0 3'',527.$$

$$2\varphi = 40^0 7'',054$$

Вычисленіе x_1.

$$x_1 = \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \frac{2}{\sin 40^0 7'',054}.$$

$$\lg 2 = 0{,}3010300$$

$$-\frac{\lg 3}{2} = \overline{1}{,}7614393$$

$$-\lg \sin 40^0 7'',054 = 0{,}1919148$$

$$\lg x_1 = 0{,}2543841$$

$$x_1 = 1{,}7963216$$

$$_2x_3 = 0{,}8981608 \pm 1{,}1916709\sqrt{-1}.$$

2-ой случай. Число p положительное. Положимъ:

$$\frac{p^3}{27} = \frac{q^2}{4}\,\mathrm{tg}^2\omega \quad \text{или} \quad \sqrt{\frac{p^3}{27}} = \frac{q}{2}\,\mathrm{tg}\,\omega; \quad \ldots \quad (12)$$

тогда

$$m = \sqrt[3]{-\frac{q \sin^2\frac{\omega}{2}}{\cos\omega}} \quad \text{и} \quad n = \sqrt[3]{-\frac{q\cos^2\frac{\omega}{2}}{\cos\omega}}.$$

Изъ (12) равенства $q = 2\,\mathrm{ctg}\,\omega\sqrt{\frac{p^3}{27}}$, а потому

$$m = \sqrt{\frac{p}{3}} \cdot \sqrt[3]{\mathrm{tg}\,\frac{\omega}{2}} \quad \text{и} \quad n = -\sqrt{\frac{p}{3}} \cdot \sqrt[3]{\mathrm{ctg}\,\frac{\omega}{2}}.$$

Положивши: $\sqrt[3]{\mathrm{tg}\,\frac{\omega}{2}} = \mathrm{tg}\,\varphi$, найдемъ:

$$m = \sqrt{\frac{p}{3}}\,\mathrm{tg}\,\varphi \quad \text{и} \quad n = -\sqrt{\frac{p}{3}}\,\mathrm{ctg}\,\varphi;$$

слѣдовательно искомые корни будутъ:

$$x = 2\sqrt{\frac{p}{3}}\,\mathrm{ctg}\,2\varphi \quad \text{и} \quad x = -\sqrt{\frac{p}{3}}\,\mathrm{ctg}\,2\varphi \pm \sqrt{-p}.\frac{1}{\sin 2\varphi}.$$

ОТДѢЛЪ VIII.

Отношенія между сторонами и тригонометрическими величинами угловъ треугольника.

§ 114. Условимся означать углы треугольника ABC буквами A, B, C, а длины сторонъ, противолежащихъ этимъ угламъ, соотвѣтственно, буквами a, b и c. Здѣсь a, b и c будутъ числа, показывающія сколько разъ единица мѣры содержится въ соотвѣтствующихъ сторонахъ, а потому всѣ стороны должны быть выражены посредствомъ одной единицы мѣры.

§ 115. Теорема. *Въ прямоугольномъ треугольникѣ катетъ равенъ гипотенузѣ, умноженной на синусъ угла, противолежащаго этому катету, или на косинусъ угла, прилежащаго къ нему.*

Фиг. 32.

Пусть въ треугольникѣ ABC уголъ C будетъ прямой; тогда (§ 16)

$$\frac{BC}{AB} = \sin A \text{ или } \frac{a}{c} = \sin A;$$

откуда

$$a = c \sin A \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Углы-же A и B взаимно-дополнительные до прямаго, а потому (§ 38) $\sin A = \cos B$ и слѣдовательно

$$a = c \cos B \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

§ 116. Теорема. *Въ прямоугольномъ треугольникѣ катетъ равенъ другому катету, умноженному на тангенсъ угла, противолежащаго первому катету, или на котангенсъ угла, прилежащаго къ нему.*

На основаніи опредѣленій (§ 16):

$$\frac{BC}{AC} = \operatorname{tg} A \text{ или } \frac{a}{b} = \operatorname{tg} A;$$

откуда

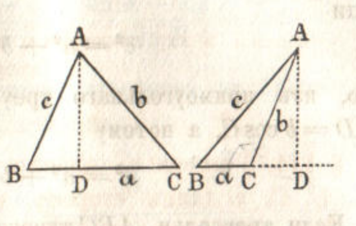
$$a = b \operatorname{tg} A \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Но $A = 90^0 - B$ и потому (§ 38) $\operatorname{tg} A = \operatorname{ctg} B$; слѣдовательно

$$a = b \operatorname{ctg} B \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

§ 117. Теорема. *Во всякомъ треугольникѣ стороны пропорціональны синусамъ противолежащихъ имъ угловъ.*

Въ треугольникѣ ABC опустимъ изъ вершины A перпендикуляръ AD на сторону BC (чер. 33) или продолженіе стороны BC (чер. 34).



Если углы B и C острые, какъ въ 33 чертежѣ, то изъ прямоугольныхъ треугольниковъ ABD и ACD найдемъ (§ 115):

$$AD = c \sin B \text{ и } AD = b \sin C$$

откуда

$$c \sin B = b \sin C$$

или

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Если-же одинъ изъ угловъ B или C тупой, какъ въ 34 чертежѣ, то, изъ прямоугольныхъ треугольниковъ ABD и ACD, получимъ:

$$AD = c \sin B \text{ и } AD = b \sin ACD;$$

но (§ 40) $\sin ACD = \sin(180^0 - C) = \sin C$; слѣдовательно $AD = b \sin C$

и потому $c \sin B = b \sin C$; откуда $\dfrac{c}{\sin C} = \dfrac{b}{\sin B}$.

Если-же уголъ C прямой, какъ въ 32 чертежѣ, то

$$b = c \sin B$$

и слѣдовательно

$$c = \frac{b}{\sin B}, \text{ или } \frac{c}{1} = \frac{b}{\sin B} \text{ или } \frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B}.$$

Точно также найдемъ:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

Соединивъ вмѣстѣ (5) и (6) равенства, получимъ:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

§ 118. Теорема. *Квадратъ стороны треугольника равенъ суммѣ квадратовъ двухъ другихъ его сторонъ безъ удвоеннаго произведенія тѣхъ-же сторонъ на косинусъ угла, заключеннаго между ними.*

Если въ треугольникѣ ABC уголъ C острый (чер. 33), то

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2\,BC \,.\, CD$$

или

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a \,.\, CD;$$

но, изъ прямоугольнаго треугольника ACD (§ 115), имѣемъ: $CD = b \cos C$, а потому

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab \cos C.$$

Если треугольн. ABC тупоугольный (чер. 34) и уголъ $C > 90^0$, то

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 + 2\,BC \,.\, CD$$

или

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2a \,.\, CD.$$

Изъ прямоугольнаго-же треугольника ABD имѣемъ: $CD =$ $= b \cos ACD = b \cos (180^0 - C)$; но (§ 40) $\cos (180^0 - C) = - \cos C$ и потому $CD = - b \cos C$, а

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab \cos C.$$

Изъ этого равенства

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\,ab}.$$

Точно также

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc} \text{ и } \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\,ac}.$$

Если-же уголъ C прямой, то $\cos C = 0$ и $c^2 = a^2 + b^2$.

§ 119. Теорема. *Сумма двухъ сторонъ треугольника относится къ ихъ разности, точно такъ, какъ тангенсъ полусуммы противолежащихъ имъ угловъ относится къ тангенсу полуразности тѣхъ же угловъ.*

Въ § 117 нашли, что

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \text{ или } \frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B};$$

придавъ къ обѣимъ частямъ равенства по 1, получимъ:

$$\frac{a}{b}+1=\frac{\sin A}{\sin B}+1 \text{ или } \frac{a+b}{b}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin B}.$$

Вычтя-же по 1 отъ обѣихъ частей того же равенства, найдемъ:

$$\frac{a}{b}-1=\frac{\sin A}{\sin B}-1 \text{ или } \frac{a-b}{b}=\frac{\sin A-\sin B}{\sin B}.$$

Раздѣливъ почленно одно полученное равенство на другое и принявъ во вниманіе формулу § 54, найдемъ:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B} \text{ или } \frac{a+b}{a-b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}.$$

§ 120. Мы нашли въ § 118, что

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

Также извѣстно (§ 57), что $2\sin^2\frac{A}{2}=1-\cos A$; слѣдовательно

$$2\sin^2\frac{A}{2}=1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}=$$

$$=\frac{a^2-(b^2-2bc+c^2)}{2bc}=\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}=\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}.$$

Положивъ $a+b+c=2p$ и вычтя изъ обѣихъ частей этого равенства сначала по $2c$, а потомъ по $2b$, найдемъ:

$$\begin{array}{r} a+b+c=2p \\ -2c \quad -2c \\ \hline a+b-c=2(p-c) \end{array}, \qquad \begin{array}{r} a+b+c=2p \\ -2b \quad -2b \\ \hline a-b+c=2(p-b) \end{array};$$

слѣдовательно

$$2\sin^2\frac{A}{2}=\frac{2(p-c)\,2(p-b)}{2bc};$$

откуда

$$\sin^2\frac{A}{2}=\frac{(p-b)(p-c)}{bc} \text{ или } \sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},$$

т. е. *во всякомъ треугольникѣ синусъ половины одного изъ его угловъ равенъ квадратному корню изъ дроби, у которой числитель есть произведенiе разностей между полупериметромъ треугольника и каждою изъ сторонъ, содержащихъ этотъ уголъ, а знаменатель — произведенiе тѣхъ же сторонъ.* На основанiи сказаннаго имѣемъ:

$$\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}} \text{ и } \sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}.$$

Также

$$2\cos^2\frac{A}{2}=1+\cos A=1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}=$$
$$=\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}=\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}.$$

Положивъ $a+b+c=2p$ и вычтя изъ обѣихъ частей равенства по $2a$, найдемъ $b+c-a=2(p-a)$; слѣдовательно

$$2\cos^2\frac{A}{2}=\frac{2p\,.\,2(p-a)}{2bc} \text{ или } \cos^2\frac{A}{2}=\frac{p(p-a)}{bc};$$

откуда

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}},$$

т. е. *во всякомъ треугольникѣ косинусъ половины одного изъ его угловъ равенъ квадратному корню изъ дроби, у которой числитель есть произведенiе полупериметра на разность между полупериметромъ и стороною, противолежащею этому углу, а знаменатель — произведенiе сторонъ, содержащихъ этотъ уголъ.* На основанiи сказаннаго

$$\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}} \text{ и } \cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}.$$

Также $\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sin\frac{A}{2}:\cos\frac{A}{2}$ и поэтому

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}},$$

т. е. *во всякомъ треугольникѣ тангенсъ половины одного изъ его угловъ равенъ квадратному корню изъ дроби, у которой числитель есть произведенiе разностей полупериметра и сторонъ, содержащихъ этотъ*

уголъ, а знаменатель — произведеніе полупериметра на разность между полупериметромъ и стороною, противолежащею этому углу.

Поэтому

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}} \text{ и } \operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}.$$

Какъ для синуса, такъ равно и для косинуса и тангенса, надо взять при корнѣ знакъ $+$, потому что углы $^1/_2 A$, $^1/_2 B$ и $^1/_2 C$ менѣе прямаго, а въ этомъ случаѣ sin, cos и tang положительные.

§ 121. Найденныя формулы для синуса, косинуса и тангенса половины угловъ треугольника возможны, если сумма двухъ сторонъ треугольника болѣе третьей. Напр. формула

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

можетъ дать для A вещественную величину только въ томъ случаѣ, когда подкоренная величина положительная и менѣе единицы. Дѣйствительно, если подъ корнемъ величина положительная, то

$$p-a>0, \text{ или } \frac{a+b+c}{2}-a>0 \text{ или } b+c>a.$$

Если-же сумма двухъ сторонъ треугольника болѣе третьей, то одна изъ сторонъ болѣе разности двухъ другихъ его сторонъ и потому $a>b-c$; въ такомъ случаѣ числитель $p(p-a)=$ $=\frac{(a+b+c)(b+c-a)}{4}=\frac{(b+c)^2-a^2}{4}<\frac{(b+c)^2-(b-c)^2}{4}$ (потому что $a>b-c$); но $(b+c)^2-(b-c)^2=4bc$ и слѣдовательно $p(p-a)<bc$, т. е. подъ корнемъ числитель менѣе знаменателя, а потому и дробь менѣе единицы.

ОТДѢЛЪ IX.

Графическіе способы рѣшенія треугольниковъ. — Хордовой масштабъ и масштабъ тангенсовъ. — Примѣры на числовыя рѣшенія треугольниковъ.

§ 122. Общія понятія. Рѣшить треугольникъ, значитъ опредѣлить величины неизвѣстныхъ частей треугольника, когда имѣемъ достаточное число данныхъ. Въ числѣ данныхъ, необходимо имѣть одну изъ сторонъ треугольника, или прямую, находящуюся въ извѣстной зависимости отъ сторонъ треугольника, какъ напр.: высоту треугольника, или радіусъ описаннаго круга около треугольника и т. п.; если же будутъ даны только углы, то треугольниковъ, при этихъ данныхъ, будетъ безчисленное множество (подобные треугольники) и слѣдовательно длины искомыхъ сторонъ будутъ произвольны.

§ 123. Рѣшить треугольникъ можно и съ помощію пріемовъ, указанныхъ въ геометріи; но, такъ какъ откладываніе данныхъ величинъ, а также измѣреніе прямыхъ и угловъ, помощію масштаба и транспортира, произвести точно нельзя, то получимъ ошибки, которыя не могутъ быть сдѣланы произвольно малыми. Объяснимъ это примѣромъ.

Фиг. 35.

Примѣръ. Рѣшить треугольникъ по двумъ сторонамъ: $a = 1265,3$ саж. и $b = 2480$ саж. и углу между ними $C = 58^0\,48'\,36'',4$.

Для рѣшенія задачи, надо взять уголъ MCN, равный $58^0\,48'\,36'',4$; но такой уголъ отложить точно нельзя, потому что на лучшихъ транспортахъ не имѣется секундъ, а тѣмъ болѣе долей секунды; слѣдовательно, уголъ MCN придется отложить неточно. Потомъ на сторонахъ CN и CM надо отложить, по масштабу, отъ вершины угла C, части: $CA = b$ и $CB = a$ и точки B и C соединить прямою; здѣсь опять будетъ неточность въ отложеніи, потому что,

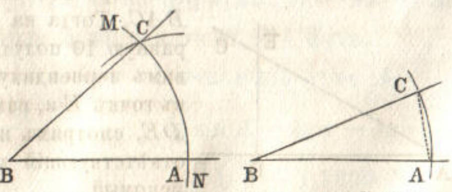
принявъ въ масштабѣ линію или $^1/_{10}$ дюйма за 10 саженъ, придется отложить $CB = 12,653$ дюйма или 12 дюймовъ 6,53 линіи, а $CA = 24,8$ дюйма; сотыя же доли линіи нельзя отложить точно, а потому 0,53 линіи будутъ отложены невѣрно. Также замѣтимъ, что, сдѣлавъ при черченіи погрѣшность, напр. на 0,01 линіи, сдѣлаемъ въ дѣйствительности погрѣшность, равную 0,01.10 саж. или 0,1 саж. Послѣ построенія треугольника ABC, придется измѣрить сторону AB и прилежащіе къ ней углы; здѣсь опять таки будутъ ошибки, которыя нельзя сдѣлать произвольно малыми.

§ 124. Таблицы хордъ и тангенсовъ. Измѣреніе угловъ, а также и черченіе ихъ, можно сдѣлать еще помощью *таблицы хордъ* и *таблицы тангенсовъ*.

1) *Таблица хордъ.* Пусть ABC будетъ данный уголъ. Изъ точки B опишемъ дугу, которая пересѣчетъ стороны угла въ точкахъ A и C; проведемъ хорду AC и изъ точки B опустимъ перпендикуляръ BD на AC; означимъ радіусъ боквою r и хорду AC буквою k. Изъ прямоугольнаго треугольника ABD имѣемъ (§ 115): $AD = AB \sin ABD$ или $\frac{k}{2} = r \sin \frac{B}{2}$; откуда $k = 2r \sin {}^1|_2 B$. Зная r и уголъ B, можемъ по логариѳмамъ опредѣлить величину k; но, чтобы не производить вычисленія для каждаго угла особо, составлена таблица хордъ для $r = 1000$ и угловъ отъ 5′ до 5′ въ промежуткѣ отъ 0⁰ до 90⁰ (см. I таблицу въ концѣ книги). Радіусъ обыкновенно принимаютъ равнымъ 10 полудюймамъ и дѣлятъ его построеніемъ поперечнаго масштаба на 1000 равныхъ частей.

Фиг. 36.

Употребленіе таблицы хордъ. Пусть требуется начертить уголъ, равный 42⁰45′. Изъ произвольной точки B (фиг. 37) опишемъ дугу MN радіусомъ, равнымъ 10 полудюймамъ и отыщемъ, въ таблицѣ хордъ, хорду, соотвѣтствующую 42⁰45′; находимъ 729. Поэтому, взявъ по масштабу длину, соотвѣтствующую 729 дѣленіямъ, опишемъ дугу этимъ радіусомъ изъ какой либо точки A дуги MN, кот. пересѣчетъ дугу MN въ точкѣ C; получимъ искомый уголъ ABC. Теперь положимъ надо измѣрить уголъ ABC (фиг. 38). Для этого опишемъ изъ точки B дугу радіусомъ, равнымъ 10 полудюймамъ, кот. пересѣчетъ бока угла въ точкахъ A и C; потомъ опредѣлимъ по масштабу длину хорды AC и смотримъ въ таблицахъ хордъ соотвѣтствующее ей число градусовъ и минутъ. Напр., если длина хорды 396, то соотв. уголъ будетъ 22⁰50′.



Фиг. 37. Фиг. 38.

Если уголъ тупой, то надо построить или измѣрить сначала дополнительный данному.

2) *Таблица тангенсовъ.* Такъ какъ для каждаго угла можемъ опредѣлить величину тангенса, то поэтому составляютъ таблицу тангенсовъ для угловъ, напр. отъ 5′ до 5′, въ промежуткѣ отъ 0^0 до 45^0, выражая ихъ въ тысячныхъ доляхъ (см. II таблицу въ концѣ книги).

Если примемъ (§ 16) одинъ изъ катетовъ прямоугольнаго треугольника за постоянную величину и раздѣлимъ его на 1000 равныхъ частей, то другой катетъ выразится въ частяхъ перваго катета; такъ, для угла въ $23^0 15'$, противоположный ему катетъ будетъ содержать 430 частей, потому что $\lg \operatorname{tg} 23^0 15' = \bar{1},6330985$, а $\operatorname{tg} 23^0 15' = 0,430 = \frac{430}{1000}$, гдѣ катетъ прилежащій къ углу, равенъ 1000, а катетъ, противолежащій углу, равенъ 430; катетъ прилежащій къ углу принимаютъ равнымъ 10 полудюймамъ и дѣлятъ его, построеніемъ поперечнаго масштаба, на 1000 равныхъ частей. Но такъ какъ въ таблицѣ помѣщены тангенсы угловъ отъ 0^0 до 45^0, то, при построеніи и измѣреніи угловъ, можетъ быть три случая:

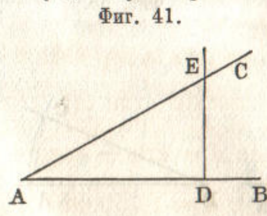
1) Уголъ менѣе 45, напр., $18^0 40'$; тогда смотримъ въ таблицѣ соотвѣтствующее число $18^0 40'$ и находимъ 338; беремъ по масштабу, длину равную 338 частямъ и на произвольной прямой откладываемъ часть AB (фиг. 39), равную 10 полудюймамъ и, возставивъ перпендикуляръ BD къ AB, отложимъ на немъ часть BC, равную 338 частямъ; точку C соединимъ съ A и получимъ уголъ BAC, равный $18^0 40'$.

Фиг. 39. Фиг. 40.

2) Уголъ менѣе 90^0 и болѣе 45^0; напр. $72^0 35'$. Изъ точки A (фиг. 40) возставимъ перпендикуляръ AD къ AB и построимъ уголъ DAC, равный дополненію до 90^0 углу $72^0 35'$, т. е. $17^0 25'$. Уголъ BAC будетъ искомый.

3) Если уголъ тупой, то сначала строимъ уголъ, дополнительный данному до двухъ прямыхъ, а за тѣмъ и самый уголъ.

Фиг. 41.



Теперь положимъ надо измѣрить данный уголъ BAC. Тогда на линіи AB отложимъ часть AD, равную 10 полудюймамъ, и изъ точки D возставимъ перпендикуляръ къ AB до встрѣчи съ AC въ точкѣ E и, измѣривъ по масштабу длину катета DE, смотримъ по таблицѣ тангенсовъ уголъ, соотвѣтствующій длинѣ DE. Этотъ уголъ и будетъ искомый.

Замѣчаніе. Можно подобнымъ образомъ составить таблицы для остальныхъ тригонометрическихъ величинъ.

РѢШЕНІЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХЪ ТРЕУГОЛЬНИКОВЪ.

§ 125. Примѣръ 1. *Рѣшить прямоугольный треугольникъ по гипотенузѣ* и *острому углу.*

Дана гипотенуза c и острый уголъ A; опредѣлить катеты a и b и острый уголъ B. Имѣемъ (§ 115):

$$a = c\sin A \text{ и } b = c\cos A,$$

откуда, по логариѳмамъ, легко опредѣлить b и c; кромѣ того

$$B = 90^0 - A.$$

Численный примѣръ. $c = 8,96$ саж. и $A = 57^0\,42'\,36''$.

Вычисленіе катета a.	Вычисленіе катета b.
$\lg a = \lg c + \lg\sin A$	$\lg b = \lg c + \lg\cos A$
$\lg c = 0,9523080$	$\lg c = 0,9523080$
$\lg\sin A = \overline{1},9270392$	$\lg\cos A = \overline{1},7277078$
$\lg a = 0,8793472$	$\lg b = 0,6800158$
$a = 7,574382$ саж.	$b = 4,786475$ саж.

$$B = 90^0 - 57^0\,42'\,36'' = 32^0\,17'\,24''.$$

§ 126. Примѣръ 2. *Рѣшить прямоугольный треугольникъ по гипотенузѣ и катету.*

Дана гипотенуза c и катетъ a; опредѣлить катетъ b и острые углы A и B. По Пиѳагоровой теоремѣ имѣемъ:

$$b^2 = c^2 - a^2;\text{ откуда } b = \sqrt{(c+a)(c-a)};$$

также

$$a = c\sin A \text{ или } a = c\cos B;\text{ откуда } \sin A = \frac{a}{c} \text{ или } \cos B = \frac{a}{c}.$$

Опредѣливъ-же A, найдемъ уголъ B по формулѣ: $B = 90^0 - A$.

Численный примѣръ. $c = 60,8$ фута и $a = 57,674$ фута.

Вычисленіе катета b.	Вычисленіе угла A.
$\lg b = \frac{\lg(c+a) + \lg(c-a)}{2}$	$\lg\sin A = \lg a - \lg c$
$\lg(c+a) = 2,0736230$	$\lg a = 1,7609801$
$\lg(c-a) = 0,4949890$	$\lg c = 1,7839036$
$\lg b = \frac{2,5686120}{2}$	$\lg\sin A = \overline{1},9770765$
$\lg b = 1,2843060$	$A = 71^0\,32'\,50'',43.$
$b = 19,24447$ фут.	

$$B = 90^0 - A = 18^0\,27'\,9'',57.$$

§ 127. Если гипотенуза c мало разнится отъ катета a, то уголъ B будетъ весьма малъ, а уголъ A близокъ къ 90^0. Въ этомъ случаѣ углы A и B надо опредѣлить или помощію способовъ, указанныхъ въ § 104—108, или помощію слѣд. формулы; знаемъ, что

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \sin\frac{B}{2} : \cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos B}{1+\cos B}};$$

но $\cos B = \frac{a}{c}$, а потому, подставимъ его величину въ предъидущее выраженіе, найдемъ:

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{c-a}{c+a}}.$$

Примѣръ. $c = 12$ и $a = 11{,}96$.

Вычисленіе катета b.

$$\lg b = \frac{\lg(c-a) + \lg(c+a)}{2}$$

$$\lg(c-a) = \bar{2}{,}6020600$$
$$\lg(c+a) = 1{,}3794868$$

$$\lg b = \frac{\bar{1}{,}9815468}{2}$$

$$\lg b = \bar{1}{,}9907734$$

$$b = 0{,}9789791$$

Вычисленіе угла B.

$$\lg\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{\lg(c-a) - \lg(c+a)}{2}$$

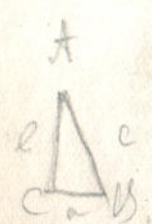
$$\lg(c-a) = \bar{2}{,}6020600$$
$$\lg(c+a) = 1{,}3794868$$

$$\lg\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{\bar{3}{,}2225732}{2}$$

$$\lg\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \bar{2}{,}6112868$$

$$\frac{B}{2} = 2^0\,20'\,21'',11$$

$$B = 4^0\,40'\,42'',22.$$



§ 128. Примѣръ 3. *Рѣшить прямоугольный треугольникъ по катету и острому углу.*

1) Данъ катетъ a и уголъ A; опредѣлить уголъ B, катетъ b и гипотенузу c.

Въ § 115 нашли

$$a = c\sin A;\ \text{откуда}\ c = \frac{a}{\sin A}$$

и (§ 116) $$a = b\operatorname{tg}A;\ \text{откуда}\ b = \frac{a}{\operatorname{tg}A};$$

кромѣ того $B = 90^0 - A$.

2) Данъ катетъ a и уголъ B; опредѣлить уголъ A, катетъ b и гипотенузу c.

Имѣемъ (§ 115):

$$a = c\cos B;\ \text{откуда}\ c = \frac{a}{\cos B}$$

и (§ 116) $$a = b\operatorname{ctg} B;\ \text{откуда}\ b = \frac{a}{\operatorname{ctg} B}.$$

Уголъ-же $A = 90^0 - B$.

Численный примѣръ. $a = 0{,}47368$ фута и $A = 16^0\,42'',54$.

Вычисленіе гипотенузы c.	Вычисленіе катета b.
$\lg c = \lg a - \lg\sin A$	$\lg b = \lg a - \lg\operatorname{tg} A$
$\lg a = \overline{1},6754850$	$\lg a = \overline{1},6754850$
$\lg\sin A = \overline{1},4406503$	$\lg\operatorname{tg} A = \overline{1},4578344$
$\lg c = 0{,}2348347$	$\lg b = 0{,}2176506$
$c = 1{,}717255$ фута	$b = 1{,}650633$ фута.

$$B = 90^0 - A = 73^0\,59'\,17'',46.$$

§ 129. Примѣръ 4. *Рѣшить прямоугольный треугольникъ по катетамъ.*

Даны катеты a и b; опредѣлить гипотенузу c и углы A и B. По § 116

$$a = b\operatorname{tg} A;\ \text{откуда}\ \operatorname{tg} A = \frac{a}{b}.$$

Опредѣливъ-же уголъ A, найдемъ уголъ B по формулѣ: $B = 90^0 - A$, а гипотенузу c по формулѣ: $c = \dfrac{a}{\sin A}$.

Если a и b небольшія числа, то, для опредѣленія c, можно воспользоваться формулою: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$; если же a и b будутъ числа большія, то надо формулу: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ сдѣлать удобною для логариѳмированія. Для этого возьмемъ подъ корнемъ b^2 за скобку:

$$c = \sqrt{b^2\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)} = b\sqrt{1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2}$$

и положимъ: $\dfrac{a}{b} = \operatorname{tg}\varphi$; найдемъ $c = b\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi} = b\sec\varphi = \dfrac{b}{\cos\varphi}$.

Численный примѣръ. $a = 1,24078$ и $b = 0,96846$.

Вычисленіе угла A.	Вычисленіе гипотенузы c.
$\lg \operatorname{tg} A = \lg a - \lg b$	$\lg c = \lg a - \lg \sin A$
$\lg a = 0,0936948$	$\lg a = 0,0936948$
$\lg b = \overline{1},9860817$	$\lg \sin A = \overline{1},8966924$
$\lg \operatorname{tg} A = 0,1076131$	$\lg c = 0,1970024$
$A = 52^0\,1'\,37'',44$	$c = 1,573992$

$$B = 37^0\,58'\,22'',56.$$

Вычисленіе гипотенузы c помощію катетовъ a и b.

Вычисленіе вспом. угла φ.	Вычисленіе гипотенузы c.
$\lg a = 0,0936948$	$\lg b = \overline{1},9860817$
$\lg b = \overline{1},9860817$	$\lg \cos \varphi = \overline{1},7890792$
$\lg \operatorname{tg} \varphi = 0,1076131$	$\lg c = 0,1970025$
$\varphi = 52^0\,1'\,37'',44$	$c = 1,573992.$

Рѣшеніе косоугольниковъ треугольниковъ.

§ 130. Примѣръ 1. *Рѣшить треугольникъ по сторонѣ и двумъ угламъ.*

Дана сторона a и углы B и C; опредѣлить уголъ A и стороны b и c. Очевидно

$$A = 180^0 - (B + C).$$

Также (§ 117)

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A} \text{ и } \frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}; \text{ откуда } b = \frac{a \sin B}{\sin A} \text{ и } c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

Если даны a, A и B; то C опредѣлимъ по формулѣ: $C = 180^0 - (A + B)$, а стороны b и c по тѣмъ-же формуламъ.

Численный примѣръ. $a = 24,6876$ саж., $B = 40^0\,45'$ и $C = 68^0\,37'\,0'',8$. Имѣемъ:

$$A = 180^0 - (B + C) = 70^0\,37'\,59'',2.$$

Вычисленіе стороны b.	Вычисленіе стороны c.
$\lg b = \lg a + \lg \sin B - \lg \sin A$	$\lg c = \lg a + \lg \sin C - \lg \sin A$
$\lg a = 1,3924789$	$\lg a = 1,3924789$
$\lg \sin B = \overline{1},8147534$	$\lg \sin C = \overline{1},9690259$
$-\lg \sin A = 0,0252975$	$-\lg \sin A = 0,0252975$
$\lg b = 1,2325298$	$\lg c = 1,3868023$
$b = 17,08165$ саж.	$c = 24,36701$ саж.

§ 131. Примѣръ 2. *Рѣшить треугольникъ по двумъ сторонамъ и углу между ними.*

Даны стороны a и b и уголъ C между ними; найти углы A и B и сторону c. Имѣемъ:

$$A+B=180^0-C;\text{ откуда } {}^1/_2(A+B)=90^0-{}^1/_2 C.$$

Кромѣ того въ § 119 нашли, что

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\operatorname{tg}{}^1/_2(A+B)}{\operatorname{tg}{}^1/_2(A-B)};$$

откуда $\operatorname{tg}{}^1/_2(A-B)=\dfrac{(a-b)\operatorname{tg}{}^1/_2(A+B)}{a+b}$.

Изъ этого равенства опредѣлимъ величину ${}^1/_2(A-B)$, которую означимъ буквою m; тогда

$${}^1/_2(A+B)=90^0-{}^1/_2 C \text{ и } {}^1/_2(A-B)=m.$$

Сложивъ почленно эти равенства, найдемъ:

$$A=90^0-{}^1/_2 C+m;$$

вычтя-же почленно второе равенство изъ перваго, получимъ:

$$B=90^0-{}^1/_2 C-m.$$

Когда-же опредѣлимъ углы A и B, то сторону c найдемъ изъ пропорціи: $\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{a}{\sin A}$ или $\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{b}{\sin B}$.

Численный примѣръ. $a=12{,}697$ аршина, $b=9{,}9$ аршина и $C=62^0\,17'\,48'',06$.

Вычисленіе ${}^1/_2(A-B)$.

$$\lg\operatorname{tg}{}^1/_2(A-B)=\lg(a-b)+\lg\operatorname{tg}{}^1/_2(A+B)-\lg(a+b).$$

$a+b=22{,}597$	$\lg(a-b)=0{,}4466925$
$a-b=2{,}797$	$\lg\operatorname{tg}{}^1/_2(A+B)=0{,}2186828$
${}^1/_2(A+B)=90^0-31^0 8'54'',03$	$-\lg(a+b)=\overline{2},6459492$
$=58^0\,51'\,5'',97$	$\lg\operatorname{tg}{}^1/_2(A-B)=\overline{1},3113245$
	${}^1/_2(A-B)=11^0 34'26'',36.$

Вычисленіе угловъ A и B.

${}^1/_2(A+B)=58^0\,51'\,5'',97$, ${}^1/_2(A-B)=11^0\,34'\,26'',36$; откуда

$$A=70^0\,25'\,32'',33 \text{ и } B=47^0\,16'\,39'',61.$$

Вычисленіе стороны c.

$$\lg c = \lg a + \lg \sin C - \lg \sin A$$
$$\lg a = 1{,}1037011$$
$$\lg \sin C = \bar{1}{,}9471232$$
$$-\lg \sin A = 0{,}0258535$$
$$\lg c = 1{,}0766778;\ c = 11{,}93103 \text{ арш.}$$

§ 132. Если извѣстны логариѳмы чиселъ a и b, то можно дать слѣдующую формулу для опредѣленія $\operatorname{tg} {}^1/_2 (A - B)$. Положимъ $\frac{a}{b} = \operatorname{tg} \vartheta$; тогда $\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg}\vartheta - 1}{\operatorname{tg}\vartheta + 1} = \operatorname{tg}\left(\vartheta - \frac{\pi}{4}\right)$ (§ 51) и потому

$$\operatorname{tg} {}^1/_2 (A - B) = \operatorname{tg}\left(\vartheta - \frac{\pi}{4}\right) \operatorname{tg} {}^1/_2 (A + B).$$

гдѣ ϑ опредѣляется изъ равенства: $\operatorname{tg}\vartheta = \frac{a}{b}$.

§ 133. Можно найти сторону c, не опредѣляя угловъ A и B, посредствомъ введенія вспомогательнаго угла. Мы нашли (§ 118), что

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab \cos C;$$

но (§ 55) $\cos C = 2 \cos^2 {}^1/_2 C - 1$, а потому

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2\,ab - 4\,ab \cos^2 {}^1/_2 C$$

или

$$c^2 = (a+b)^2 - 4\,ab \cos^2 {}^1/_2 C$$

или

$$c^2 = (a+b)^2 \left\{1 - \frac{4\,ab}{(a+b)^2} \cos^2 {}^1/_2 C\right\}.$$

Опредѣлимъ уголъ ϑ такъ, чтобы

$$\sin^2 \vartheta = \frac{4\,ab}{(a+b)^2} \cos^2 {}^1/_2 C \text{ или } \sin\vartheta = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b} \cos {}^1/_2 C;$$

тогда

$$c^2 = (a+b)^2 (1 - \sin^2 \vartheta) \text{ или } c^2 = (a+b)^2 \cos^2 \vartheta;$$

откуда

$$c = (a+b) \cos \vartheta.$$

Численный примѣръ. $a = 12{,}697$ арш., $b = 3{,}3$ саж. и $c = 62^0\,17'\,48'',06$.

Вычисленіе угла ϑ.

$$\lg\sin\vartheta = \lg 2 + {}^1/_2(\lg a + \lg b) + {} - \lg(a+b) + \lg\cos{}^1/_2 C$$

$$\lg 2 = 0,3010300$$
$${}^1/_2(\lg a + \lg b) = 1,0496682$$
$$-\lg(a+b) = \overline{2},6459492$$
$$\lg\cos{}^1/_2 C = \overline{1},9323880$$

$$\lg\sin\vartheta = \overline{1},9290354$$
$$\vartheta = 58^0\,7'\,48'',55.$$

Вычисленіе стороны c.

$$\lg c = \lg(a+b) + \lg\cos\vartheta$$
$$\lg(a+b) = 1,3540508$$
$$\lg\cos\vartheta = \overline{1},7226269$$

$$\lg c = 1,0766777$$
$$c = 11,93103 \text{ арш.}$$

§ 134. Примѣръ 3. *Рѣшить треугольникъ по тремъ сторонамъ.* Даны стороны a, b и c; опред. углы A, B и C. Въ § 120 нашли

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},\quad \cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

и $$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}.$$

Въ томъ случаѣ, когда надо опредѣлить всѣ углы треугольника, формула для тангенса половины угла имѣетъ преимущество предъ другими, потому что, для опредѣленія угловъ, придется отыскать логариѳмы только четырехъ чиселъ: $p, p-a$, $p-b$ и $p-c$; между тѣмъ, если возьмемъ формулу для синуса или косинуса половины угла треугольника, то придется отыскать логариѳмы семи чиселъ: $p, p-a, p-b, p-c, a, b$ и c.

Численный примѣръ. $a = 3,7$ метра, $b = 4$ метр. и $c = 2,607$ метра.

$$2p = 10,307, \quad p = 5,1535$$
$$p-a = 1,4535$$
$$p-b = 1,1535$$
$$p-c = 2,5465$$

$$\lg p = 0,7121023$$
$$\lg(p-a) = 0,1624150$$
$$\lg(p-b) = 0,0620176$$
$$\lg(p-c) = 0,4059437$$

Вычисленіе угла A.

$$\lg\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{\lg(p-b) + \lg(p-c) - \lg p - \lg(p-a)}{2}$$

$$\lg(p-b) = 0,0620176$$
$$\lg(p-c) = 0,4059437$$
$$-\lg p = \overline{1},2878977$$
$$-\lg(p-a) = \overline{1},8375850$$

$$\lg\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{\overline{1},5934440}{2}$$

$$\lg\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \overline{1},7967220$$
$$\frac{A}{2} = 32^0\,3'\,19'',19$$
$$A = 64^0\,6'\,38'',38$$

Вычисленіе угла B.

$$\lg \operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{\lg(p-a)+\lg(p-c)-\lg p-\lg(p-b)}{2}$$

$\lg(p-a)=0{,}1624150$	$\lg \operatorname{tg}\frac{B}{2}=\overline{1}{,}8971194$
$\lg(p-c)=0{,}4059437$	$\frac{B}{2}=38^0\,16'\,34'',18$
$-\lg p=\overline{1}{,}2878977$	$B=76^0\,33'\,\;8'',36$
$-\lg(p-b)=\overline{1}{,}9379824$	
$\lg \operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{\overline{1}{,}7942388}{2}$	

Вычисленіе угла C.

$$\lg \operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{\lg(p-a)+\lg(p-b)-\lg p-\lg(p-c)}{2}$$

$\lg(p-a)=0{,}1624150$	$\lg \operatorname{tg}\frac{C}{2}=\overline{1}{,}5531933$
$\lg(p-b)=0{,}0620176$	$\frac{C}{2}=19^0\,40'\,\;6'',63$
$-\lg p=\overline{1}{,}2878977$	$C=39^0\,20'\,13'',26$
$-\lg(p-c)=\overline{1}{,}5940563$	
$\lg \operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{\overline{1}{,}1063866}{2}$	

Провѣрка.

$$A=64^0\,6'\,\;38'',38$$
$$B=76^0\,33'\,\;8'',36$$
$$C=39^0\,20'\,13'',26$$

$A+B+C=180^0$ съ точн. до $0'',01$.

§ 135. Если требуется опредѣлить одинъ изъ угловъ треугольника, напр. уголъ A, то можно воспользоваться формулою или для $\sin\frac{A}{2}$ или для $\cos\frac{A}{2}$. Опредѣлимъ уголъ A по формулѣ $\sin\frac{A}{2}=$ $=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$ въ примѣрѣ изъ предъидущаго параграфа.

Имѣемъ:

$$\lg\sin\frac{A}{2}=\frac{\lg(p-b)+\lg(p-c)-\lg b-\lg c}{2}$$

$$\lg(p-b)=0{,}0620176$$
$$\lg(p-c)=0{,}4059437$$
$$-\lg b=\overline{1}{,}3979400$$
$$-\lg c=\overline{1}{,}5838590$$
$$\lg\sin\frac{A}{2}=\frac{\overline{1}{,}4497603}{2}$$

$$\lg\sin\frac{A}{2}=\overline{1}{,}7248802$$
$$\frac{A}{2}=32^0\,3'\,19'',19$$
$$A=64^0\,6'\,38'',38.$$

§ 136. Когда даны стороны треугольника, то его углы можно еще опредѣлить, разбивая данный треугольникъ на прямоугольные треугольн. Въ самомъ дѣлѣ, когда углы B и C острые, то фиг. 42

Фиг. 42. Фиг. 43.

$$AD^2=AB^2-BD^2=AC^2-DC^2;$$

откуда

$$AB^2-BD^2=AC^2-DC^2, \text{ или}$$
$$AB^2-AC^2=BD^2-DC^2$$

или

$$(AB+AC)(AB-AC)=(BD+DC)(BD-DC);$$

но такъ какъ $BD+DC=BC$, то

$$(AB+AC)(AB-AC)=BC(BD-DC).$$

Изъ этого равенства можемъ опредѣлить разность $BD-DC$, потому что остальные члены извѣстны; зная же $BD-DC$ и $BD+DC$, опредѣлимъ BD и DC. Тогда

$$\cos B=\frac{BD}{AB} \text{ и } \cos C=\frac{DC}{AC};$$

откуда, по логариѳмамъ, найдемъ углы B и C.

Когда-же одинъ изъ угловъ B и C тупой, напр. уголъ C (чер. 43), то получимъ также, что

$$(AB+AC)(AB-AC)=(BD+DC)(BD-DC);$$

но $BD-DC=BC$, а потому

$$(AB+AC)(AB-AC)=(BD+DC)BC;$$

откуда опредѣлимъ величину $BD+DC$.

Зная же $BD+DC$ и $BD-DC$, найдемъ BD и DC; тогда

$$\cos B=\frac{BD}{AB} \text{ и } \cos(180^0-C)=\frac{DC}{AC}.$$

Изъ этихъ равенствъ, по логариѳмамъ, найдемъ углы B и 180^0-C, а слѣдовательно и уголъ C.

§ 137. Примѣръ 4. *Рѣшить треугольникъ по двумъ сторонамъ и углу, противолежащему одной изъ нихъ.*

Даны стороны a и b и уголъ A; требуется опредѣлить сторону c и углы B и C. Имѣемъ (§ 117):

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B};\quad \text{откуда}\quad \sin B=\frac{b}{a}\sin A.$$

Разсмотримъ здѣсь три случая:

1) $\frac{b}{a}\sin A<1$. Въ такомъ случаѣ для угла B найдемъ два значенія, изъ которыхъ одинъ будетъ служить дополненіемъ другому до 180^0 (§ 40), т. е. уголъ B будетъ или острый или тупой.

Если при этомъ $a>b$, то уголъ A долженъ быть болѣе угла B; а слѣдовательно для угла B надо взять меньшую величину, потому что если бы взяли для угла B второе значеніе, т. е. большее 90^0, то и уголъ A былъ бы болѣе 90^0 и тогда бы сумма угловъ A и B была бы болѣе 180^0, что невозможно; слѣдовательно, въ разсматриваемомъ случаѣ, имѣемъ для угла B только одно значеніе. Если же $a<b$, то и $A<B$; въ такомъ случаѣ для угла B имѣемъ два значенія.

Когда найдемъ уголъ B, то уголъ C опредѣлимъ по формулѣ: $C=180^0-(A+B)$, а сторону c изъ равенства:

$$\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}.$$

Въ томъ случаѣ, когда для B имѣемъ два значенія, то и для стороны c и угла C будемъ имѣть по два значенія; слѣдовательно получимъ два треугольника.

2) Если $\frac{b}{a}\sin A=1$, то $\sin B=1$ и $B=90^0$; въ такомъ случаѣ для c и C найдемъ только по одной величинѣ. Рѣшенія не будетъ, если $a<b$ и $A=90^0$, а также, если $a=b$ и $A>90^0$.

3) Если $\frac{b}{a}\sin A>1$, то $\sin B>1$, что невозможно (§ 22); слѣдов. нельзя опредѣлить угла B, т. е. рѣшить треугольникъ.

Численный примѣръ. $a=142$ арш., $b=50$ арш. и $A=79^0\,42'\,38''$.

Вычисленіе угла B.

$$\lg\sin B = \lg b + \lg\sin A - \lg a$$

$$\lg b = 1{,}6989700$$
$$\lg\sin A = \overline{1}{,}9929589$$
$$-\lg a = \overline{3}{,}8477117$$
$$\lg\sin B = \overline{1}{,}5396406$$
$$B = 20^0\,16'\,13'',21$$

Другое значеніе для угла B:

$$180^0 - 20^0\,16'\,13'',21 =$$
$$= 159^0\,43'\,46'',79$$

не удовлетворяетъ вопросу.

Вычисленіе угла C.

$$C = 180^0 - (A+B) = 80^0 1' 8'',79$$

Вычисленіе стороны c.

$$\lg c = \lg a + \lg\sin C - \lg\sin A$$

$$\lg a = 2{,}1522883$$
$$\lg\sin C = \overline{1}{,}9933770$$
$$-\lg\sin A = 0{,}0070411$$
$$\lg c = 2{,}1527064$$
$$c = 142{,}1368 \text{ арш.}$$

Численный примѣръ. $a = 2{,}7456$ саж., $b = 3{,}9$ саж. и $A = 32^0\,36'\,0'',7$.

Вычисленіе угла B.

$$\lg b = 0{,}5910646$$
$$\lg\sin A = \overline{1}{,}7314063$$
$$-\lg a = \overline{1}{,}5613627$$
$$\lg\sin B = \overline{1}{,}8838336$$
$$B = 49^0\,56'\,2'',36$$

или $B = 180^0 - 49^0 56' 2'',36$
$= 130^0\,3'\,57'',64$.

Вычисленіе угла C.

$$C = 180^0 - (A + B)$$
$$C = 97^0\,27'\,56'',94$$

или

$$C = 17^0\,20'\,1'',66.$$

Вычисленіе стороны c.

$$\lg c = \lg a + \lg\sin C - \lg\sin A.$$

Первое рѣшеніе.

$$C = 97^0\,27'\,56'',94$$
$$\lg c = 0{,}4386373$$
$$\lg\sin C = \overline{1}{,}9963026$$
$$-\lg\sin A = 0{,}2685937$$
$$\lg c = 0{,}7035336$$
$$c = 5{,}052817 \text{ саж.}$$

Второе рѣшеніе.

$$C = 17^0\,20'\,1'',66$$
$$\lg a = 0{,}4386373$$
$$\lg\sin C = \overline{1}{,}4741258$$
$$-\lg\sin A = 0{,}2685937$$
$$\lg c = 0{,}1813568$$
$$c = 1{,}518297 \text{ саж.}$$

Численный примѣръ. $a = 1$ саж., $b = 6{,}25$ арш. и $A = 72^0\,14''$.

Опредѣленіе угла B.

$$\lg b = 0{,}7958800$$
$$\lg\sin A = \overline{1}{,}9782159$$
$$-\lg a = \overline{1}{,}5228787$$
$$\lg\sin B = 0{,}2969746,$$

что невозможно, а потому, при этихъ данныхъ, нельзя рѣшить треугольникъ.

§ 138. Замѣчаніе. Если извѣстны тригонометрическія величины угловъ, то, въ такомъ случаѣ, иногда рѣшаютъ треугольникъ и безъ помощи логариѳмическихъ таблицъ.

Примѣръ 1. Найти катетъ a въ прямоугольномъ треугольникѣ, въ кот. гипотенуза $c = 5$ саж., а острый уголъ $A = 30^0$. Имѣемъ:

$$a = c \sin A = 5 \sin 30^0 = 5 \,.\, {}^1/_2 = 2{,}5 \text{ саж.}$$

Примѣръ 2. Найти сторону a въ треугольникѣ ABC, въ кот. двѣ другія стороны: $b = 2$ арш. и $c = 3$ арш. и уголъ между ними $A = 60^0$. Имѣемъ (§ 118): $a^2 = b^2 + c^3 - 2\,bc \cos A$, а потому

$$a^2 = 2^2 + 3^2 - 2.2.3 \cos 60^0 = 4 + 9 - 12.\tfrac{1}{2} = 7;$$

$$\text{откуда } a = \sqrt{7} = 2{,}64 \text{ арш.}$$

ОТДѢЛЪ X.

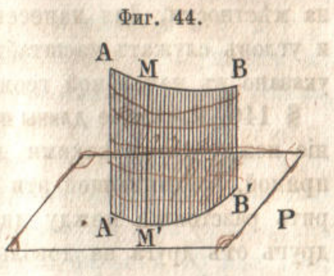
Описаніе нѣкоторыхъ землемѣрныхъ инструментовъ.— Приложеніе тригонометріи къ рѣшенію нѣкоторыхъ задачъ на мѣстности.

§ 139. Понятіе о планѣ мѣстности. Графическое изображеніе на плоскости небольшаго участка земной поверхности наз. *планомъ,* а самыя дѣйствія, производимыя на мѣстности для составленія плана, наз. *съемкою.* А такъ какъ на поверхности земли существуютъ различныя неровности, то поэтому на планахъ помѣщаютъ не самую мѣстность, а ея *горизонтальное проложеніе.*

Намъ извѣстно, что *отвѣсною* или *вертикальною* линіею наз. та, которой направленіе совпадаетъ съ путемъ свободно падающаго тѣла. На практикѣ, для полученія этого направленія, берутъ нить и къ одному ея концу прикрѣпляютъ нѣкоторый грузъ; тогда, поднявъ другой конецъ нити на столько, чтобъ грузъ не касался ни какого предмета, нить займетъ вертикальное положеніе. Плоскость, перпендикулярная къ вертикальному направленію, наз. *горизонтальною;* она будетъ параллельна поверхности спокойно стоячей воды.

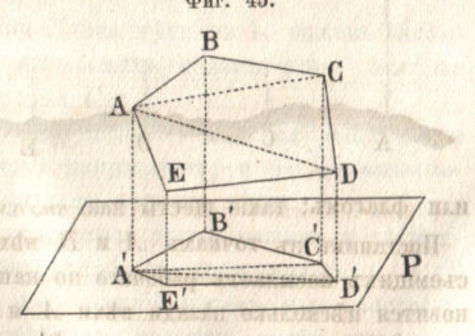
Основаніе перпендикуляра, опущеннаго изъ данной точки на горизонтальную плоскость, наз. *горизонтальнымъ проложеніемъ* этой точки. Горизонтальнымъ проложеніемъ какой либо линіи на горизонтальной плоскости наз. такая линія въ плоскости, на которой находятся горизонтальныя проложонія точекъ данной линіи. Такъ, напримѣръ, если линія $A'B'$ будетъ горизонтальное проложеніе линіи AB на плоскости P, то, опуствивъ перпендикуляръ MM' изъ точки M линіи AB на эту плоскость, увидимъ, что точка M' лежитъ на линіи $A'B'$. Если линія будетъ прямая, то и горизонтальнее проложеніе ея будетъ тоже прямая, потому что перпендикуляры, опущенные изъ точекъ прямой на плоскость, будутъ лежать въ плоскости, перпендикулярной къ данной; пересѣченіе же плоскостей есть прямая.

Фиг. 44.



Горизонтальнымъ проложеніемъ части земной поверхности на плоскости наз. площадь, ограниченная горизонтальнымъ проложеніемъ на ней контура этой части. Такъ, если фигура $ABCDE$ есть часть земной поверхности, то ея горизонтальное проложеніе на плоскости P получимъ, опуствивъ перпендикуляры: AA', BB', CC',... на эту плоскость и соединивъ прямыми основанія A', B', C',... этихъ перпендикуляровъ.

Фиг. 45.



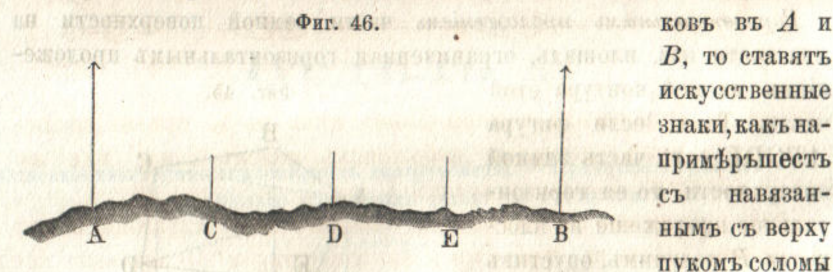
Такимъ образомъ, для изображенія на бумагѣ небольшой части земной поверхности, воображаютъ горизонтальную плоскость, на которой помѣщаютъ горизонтальное проложеніе этой части, разсматривая ея контуръ какъ многоугольникъ, котораго периметръ близко къ нему подходитъ; потомъ, на основаніи геометрическихъ правилъ, чертятъ на бумагѣ въ уменьшенномъ видѣ фигуру, подобную той, котор. получилась въ горизонтальномъ проложеніи, соблюдая при этомъ, какъ пропорціональность линій, такъ и взаимное ихъ положеніе. Но, чтобы составить планъ, надо умѣть измѣрять на

мѣстности длины линій и величины угловъ, а потому займемся описаніемъ инструментовъ, помощію которыхъ измѣряютъ линіи и углы на мѣстности. Для нанесенія же на бумагу измѣренныхъ прямыхъ и угловъ служатъ масштабъ и транспортиръ, употребленіе которыхъ указано въ начальной геометріи *).

§ 140. Измѣреніе длины прямой на мѣстности. Кратчайшее разстояніе между двумя какими либо предметами опредѣляется длиной прямой, соединяющей эти предметы; поэтому, прежде чѣмъ измѣрить разстояніе между двумя предметами, кот. иногда отстоятъ другъ отъ друга на довольно большое разстояніе, надо опредѣлить направленіе прямой или, какъ говорятъ, *провѣшить* прямую. Это дѣлается помощію кольевъ, втыкаемыхъ въ землю и расположенныхъ такъ, чтобы два крайніе предмета и колья лежали бы въ одной вертикальной плоскости и чтобы сосѣдніе изъ нихъ были бы видны.

Положимъ требуется означить направленіе между предметами A и B, т. е. провѣшить линію AB. Если нѣтъ естественныхъ знаковъ въ A и B, то ставятъ искусственные знаки, какъ напримѣръ шестъ съ навязаннымъ съ верху пукомъ соломы или флагомъ; такіе шесты наз. *вѣхами*.

Фиг. 46.



Поставивъ въ точкахъ A и B вѣхи въ отвѣсномъ положеніи, съемщикъ посылаетъ рабочаго по направленію къ B, а самъ становится нѣсколько назади вѣхи A и такъ, чтобы глазъ былъ бы въ вертикальной плоскости, проходящей чрезъ края вѣхъ A и B. Рабочій же, взявъ колъ и отойдя отъ вѣхи A на разстояніи отъ 30 до 50 сажень, останавливается въ точкѣ C и передвигаетъ колъ вправо или влѣво, смотря по знаку съемщика, пока край его кола не будетъ въ плоскости, проходящей чрезъ края вѣхъ A и B; тогда рабочій втыкаетъ колъ въ землю и отходитъ далѣе въ направленіи къ B, а съемщикъ остается на своемъ мѣстѣ. Рабочій,

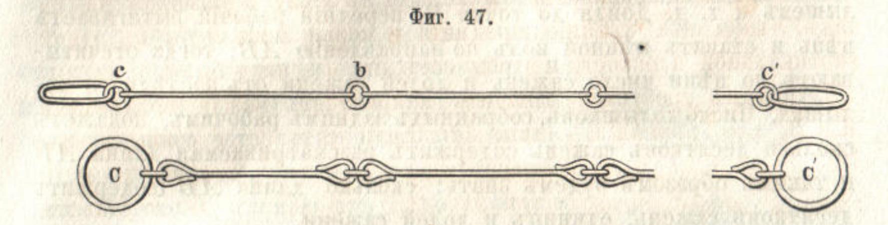
*) Желающіе ознакомиться съ употребленіемъ масштаба и транспортира могутъ обратиться къ геометріи (§§ 33, 34, § 177 — § 180), составленной мною.

отойдя отъ кола C отъ 30 до 50 сажень, останавливается и передвигаетъ колъ по указанію съемщика такъ, чтобы край кола лежалъ бы въ одной плоскости съ краями кола C и вѣхи B и т. д.

Когда опредѣлено направленіе линіи, тогда приступаютъ къ измѣренію ея. Для этого служатъ: мѣрная цѣпь, веревка, тесьма, жезлы и т. д.

Мѣрная цѣпь бываетъ обыкновенно длиною въ 10 сажень и состоитъ изъ колѣнъ, сдѣланныхъ изъ проволоки, достаточной толщины, т. е. чтобъ цѣпь не была бы очень тяжела и въ то же время колѣна не гнулись. Число колѣнъ въ цѣпи бываетъ 70 или 100; въ первомъ случаѣ разстояніе между центрами колецъ c и b равно

Фиг. 47.



футу, а во второмъ 0,1 сажени. Длина цѣпи въ 10 сажень заключается или между центрами небольшихъ колецъ c и c' или же между центрами большихъ колецъ C и C'.

Принадлежности цѣпи суть: два *цѣпныхъ* кола, служащихъ для натягиванія цѣпи въ требуемомъ направленіи, и 10 *цѣпныхъ колышковъ* для означенія на мѣстности концовъ цѣпи.

Цѣпной колъ имѣетъ въ длину около двухъ аршинъ и дѣлается изъ дерева такой толщины, чтобы крайнія кольца C и C' можно было бы надѣвать на его; нижній конецъ кола заостренъ и немного выше вдѣлана поперечная палочка, чтобы кольцо не сваливалось бы при переноскѣ. Цѣпные же колышки дѣлаются изъ желѣзной проволки толщиною около 2 линій, а длиною около фута; снизу они заострены, а сверху загнуты для того, чтобы удобно было ихъ переносить. За неимѣніемъ желѣзныхъ колышковъ, можно употреблять деревянные, нижній конецъ которыхъ заостренъ, а верхній снабженъ веревкою для удобства переноски.

Измѣреніе провѣшенной линіи AB (фиг. 46) цѣпью, помѣщенною на фигурѣ 47, производится такъ: рабочіе надѣваютъ кольца C и C' на цѣпные колья и одинъ изъ нихъ ставитъ вертикально

цѣпной колъ въ точкѣ A, а другой идетъ по направленію къ B, пока не будетъ натянута цѣпь, и передвигаетъ свой цѣпной колъ, по указанію товарища, вправо или влѣво, пока его колъ не будетъ въ одной плоскости съ вѣхами. (При этомъ надо наблюдать, чтобы цѣпь была натянута и чтобы колѣна лежали правильно; для чего надо встряхнуть цѣпь). Затѣмъ, передній рабочій вынимаетъ свой цѣпной колъ и ставитъ на его мѣсто малый колышекъ и, давъ знакъ своему товарищу, идетъ съ цѣпью далѣе, пока задній рабочій не дойдетъ до колышка. Здѣсь онъ вынимаетъ колышекъ и ставитъ на его мѣсто цѣпной колъ, а второй рабочій, встряхнувъ цѣпь и вытянувъ ее, какъ было уже сказано, ставитъ второй колышекъ и т. д. Дойдя до точки B, передній рабочій вытягиваетъ цѣпь и ставитъ цѣпной колъ по направленію AB; тогда отсчитываютъ по цѣпи число сажень и долей сажени отъ послѣдняго колышка. Число колышковъ, собранныхъ заднимъ рабочимъ, покажетъ сколько десятковъ сажень содержитъ разсматриваемая длина AB и такимъ образомъ будемъ знать: сколько длина AB содержитъ десятковъ сажень, единицъ и долей сажени.

§ 141. Для плановъ нужно знать горизонтальныя проложенія линіи, а потому надо обращать вниманіе на мѣстность и въ случаѣ, если будетъ она поката, то поднять одинъ конецъ цѣпи, которую въ этомъ случаѣ укорачиваютъ на столько, чтобъ цѣпь была горизонтальна. Въ этомъ случаѣ измѣреніе линіи удобнѣе произвести *ватерпассомъ*.

Ватерпассъ состоитъ изъ бруска AB длиною въ сажень, шириною около $2^1/_2$ дюймовъ и толщиною въ дюймъ, раздѣленнаго на футы и дюймы или десятыя и сотыя сажени; сверху бруска придѣланы еще два равные бруска, составляющіе равнобедренный треугольникъ. Въ вершинѣ треугольника прикрѣплена нить съ отвѣсомъ, а въ срединѣ бруска проведена черточка; такъ, что когда ватерпассъ поставленъ горизонтально, то нить должна прикрывать эту черточку.

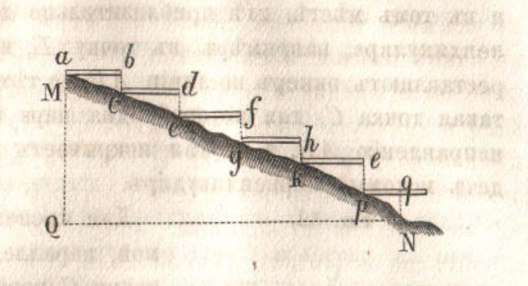
Фиг. 48.

B A

Чтобы опредѣлить горизонтальное проложеніе линіи MN, приложимъ конецъ A линейки къ началу M линіи и поднимемъ

другой конецъ B на столько, чтобы ватерпассъ занялъ горизонтальное положеніе ab; замѣчаемъ, помощію отвѣса, точку c на линіи MN, приложивъ его къ b. Послѣ этого прикладываемъ конецъ A ватерпасса къ точкѣ c и, поступая по предъидущему, опредѣляемъ еще точку e и т. д. Сумма линій ab, cd,... очевидно представитъ длину горизонтальнаго проложенія линіи MN.

Фиг. 49.

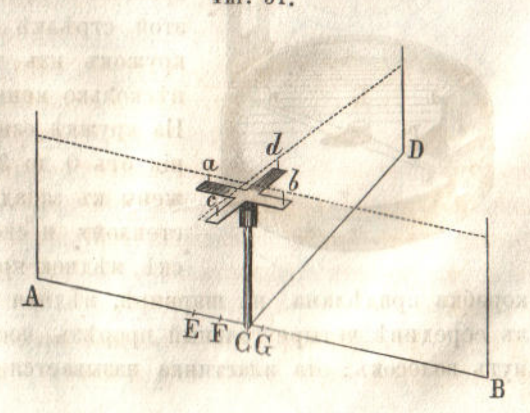


§ 142. Эккеръ. Для проведенія на мѣстности перпендикулярныхъи параллельныхъ линій служитъ инструментъ, наз. *эккеромъ*. Простой изъ нихъ есть крестообразный, состоящій изъ двухъ деревянныхъ или металлическихъ брусковъ, длиною отъ $1/2$ до 1 фута и соединенныхъ крестообразно (фиг. 50). На концахъ брусковъ прикрѣплены стальные шпиньки a, b, c, d такъ, чтобы линіи ab и cd, ихъ соединяющія, составляли прямой уголъ. Въ серединѣ креста дѣлается отверстіе или пустая цилиндрическая трубка H, которая надѣвается на колъ S.

Фиг. 50.

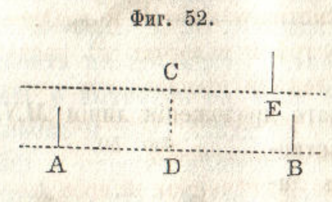
Чтобы помощію эккера возставить перпендикуляръ къ линіи AB въ точкѣ C, втыкаютъ эккеръ въ землю вѣточкѣ C и приводятъ его въ горизонтальное положеніе; одну пару шпиньковъ a и b наводятъ на точки A и B, а по направленію другихъ ставятъ вѣху D. Прямая CD будетъ искомый перпендикуляръ.

Фиг. 51.



Если же требуется опустить перпендикуляръ изъ точки D на линію AB помощію эккера, то становятся съ нимъ на линіи BA и въ томъ мѣстѣ, гдѣ приблизительно должно быть основаніе перпендикуляра, напримѣръ въ точку E, или F, или G; потомъ переставляютъ эккеръ по линіи AB до тѣхъ поръ, пока не найдется такая точка C, для которой одна пара шпиньковъ расположена по направленію AB, а другая покрываетъ вѣху D. Прямая CD будетъ искомый перпендикуляръ.

Фиг. 52.

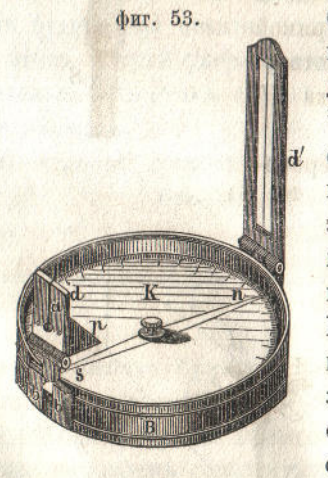


Для проведенія чрезъ точку C прямой, параллельной AB, опустимъ изъ точки C перпендикуляръ CD на AB и чрезъ точку C проведемъ прямую CE, перпендикулярно CD. Прямая CE будетъ искомая.

Кромѣ описаннаго нами эккера есть еще другіе, помощію корыхъ можно откладывать углы въ 45^0 и 90^0. Но вообще для измѣренія какихъ бы то ни было угловъ на мѣстности служатъ: *буссоль*, *астролябія* и *мензула*.

§ 143. Буссоль. Буссоли существуютъ нѣсколькихъ системъ, а потому мы остановимся здѣсь на болѣе употребительной изъ нихъ: буссоли *Шмалькалдера*. Она состоитъ изъ мѣдной цилиндрической коробки, діаметра около 3 дюймовъ и высотою $^3/_4$ дюйма. На днѣ коробки, въ центрѣ ея, утвержденъ шпиль, на которомъ вращается магнитная стрѣлка ns; къ этой стрѣлкѣ прикрѣпленъ на глухо кружокъ изъ тонкой мѣдной латуни, нѣсколько меньшаго діаметра коробки. На кружкѣ означены градусныя дѣленія отъ 0 до 360^0 и подписи расположены къ западу. Коробка закрывается стекломъ и сверхъ того, при переноскѣ, мѣдною крышкою. Къ одному краю коробки придѣлана, на шарнирѣ, мѣдная пластинка d', имѣющая въ серединѣ четыреугольный прорѣзъ, посрединѣ котораго протянутъ волосокъ; эта пластинка называется *предметнымъ діоптромъ*.

фиг. 53.

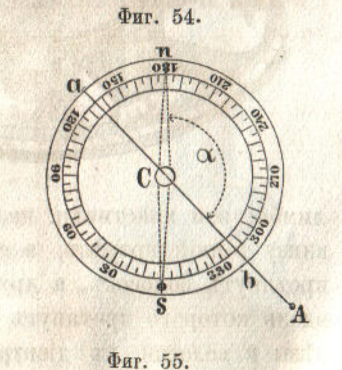


На другомъ же краю коробки, діаметрально противоположно предметному діоптру, придѣланы два бруска *b* и *b*, между которыми движется брусокъ, съ прикрѣпленнымъ къ нему, на шарнирѣ, *глазнымъ діоптромъ d*; онъ состоитъ изъ мѣдной пластинки съ узкимъ продольнымъ отверстіемъ, противъ котораго укрѣплена прямоугольная и равнобедренная хрустальная призма *p*; чрезъ эту призму можно видѣть въ увеличенномъ видѣ градусную надпись круга *K*, въ обратномъ порядкѣ. Слѣдовательно, чрезъ глазной діоптръ можно видѣть и волосокъ предметнаго діоптра и градусную надпись. Вырѣзъ въ глазномъ діоптрѣ и волосокъ въ предметномъ расположены такъ, чтобы они лежали въ плоскости, перпендикулярной къ плоскости круга *K* и проходящей чрезъ центръ этого круга; эта плоскость называется *коллимаціонною.*

Къ дну буссоли придѣлана внизъ трубка, надѣваемая на колъ, который снизу заостренъ для того, чтобы можно было втыкать въ землю.

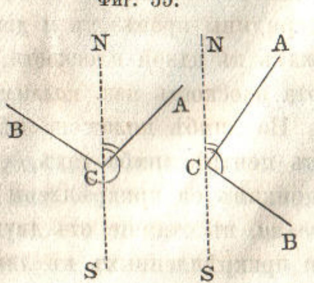
Употребленіе буссоли. Помощію буссоли опредѣляется непосредственно уголъ, составленный направленіемъ прямой, находящейся въ коллимаціонной плоскости и проходящей чрезъ данную точку, съ магнитнымъ меридіаномъ; этотъ уголъ наз. *азимутомъ* и отсчитывается отъ сѣвера чрезъ востокъ къ данному направленію до 360°.

Фиг. 54.



Для опредѣленія азимута какого-либо направленія *CA* ставятъ буссоль въ точку *C* и приводятъ ее, на глазъ, въ горизонтальное положеніе. Направляютъ діоптры на точку *A* (*a* глазной, a *b* предметный діоптръ) такъ, чтобы точка *A* была въ коллимаціонной плоскости и смотрятъ чрезъ призму номеръ градуснаго дѣленія; а такъ какъ нуль градусовъ при южномъ концѣ стрѣлки *s*, то чрезъ призму опредѣлимъ число градусовъ дуги *sa*, измѣряющей уголъ *sCa* или равный ему уголъ *ACn*; уголъ же *ACn* будетъ азимутъ линіи *AC*. Помощію буссоли можно опредѣлить уголъ, составленный двумя направленіями *CA* и *CB*. Для

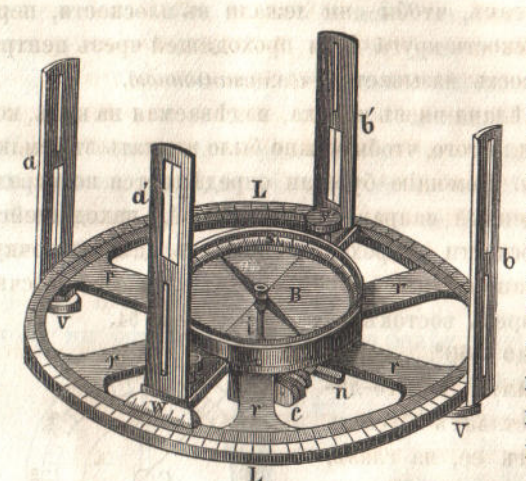
Фиг. 55.



этого опредѣляютъ азимуты боковъ угла ACB, т. е. $\angle\angle$ ACN и BCN и берутъ разность азимутовъ; если эта разность менѣе 180^0, то полученный уголъ въ разности и будетъ искомый, а если разность азимутовъ будетъ болѣе 180^0, то искомый уголъ будетъ равенъ дополненію до 360^0 найденному углу въ разности азимутовъ.

§ 144. Астролябія. Для непосредственнаго и болѣе точнаго измѣренія угловъ на мѣстности и опредѣленія азимутовъ данныхъ направленій служитъ *астролябія*. Она состоитъ изъ мѣднаго круга L и L, діаметра отъ 8 до 12 дюймовъ и раздѣленнаго на градусы отъ 0^0 до 360^0, подпись которыхъ идетъ въ одну сторону; этотъ кругъ, назыв. *лимбомъ*, соединенъ съ своимъ центромъ четырьмя или шестью пластинками. На концѣ діаметра, проходящаго чрезъ 0^0 и 180^0, прикрѣплены къ лимбу двѣ пластинки a и b, перпендикулярныя къ плоскости лимба; эти пластинки, называемыя *діоптрами*, имѣютъ: одна — внизу тонкій прорѣзъ, а сверху четыреугольный, вдоль котораго протянутъ волосокъ, а другая — внизу четыреугольный прорѣзъ, вдоль котораго протянутъ волосокъ, а сверху узкій прорѣзъ. Прорѣзы и волоски въ діоптрахъ расположены такъ, что волоски, середины прорѣзовъ и діаметръ, проходящій чрезъ 0^0 и 180^0, лежатъ въ одной плоскости, перпендикулярной къ плоскости лимба; эта плоскость наз. *коллимаціонною*.

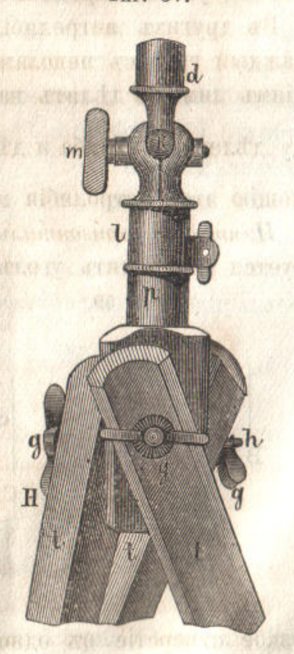
Фиг. 56.



На лимбѣ положена мѣдная линейка или *алидада*, укрѣпленная въ центрѣ лимба такъ, что она можетъ свободно вращаться; къ концамъ ея прикрѣплены винтами v' діоптры a' и b', наз. *подвижными*, въ отличіе отъ двухъ первыхъ, называемыхъ *неподвижными* и прикрѣпленныхъ къ лимбу винтами v и v.

Длина алидады нѣсколько болѣе діаметра внутренняго круга лимба; на одномъ изъ округленныхъ концовъ ея *w* намѣчены дѣленія, служащія для болѣе точнаго опредѣленія угловъ; эти дѣленія наз. *ноніусомъ* или *верньеромъ*, а тотъ діоптръ, подлѣ котораго ноніусъ, наз. *глазнымъ*, а противоположный — *предметнымъ*. На обоихъ концахъ алидады имѣются черточки, наз. *показателями* или *индексами*, находящіяся въ одной коллимаціонной плоскости подвижныхъ діоптровъ. Въ серединѣ алидады прикрѣпленъ компасъ *B*, состоящій изъ цилиндрической коробки, внутри которой на днѣ укрѣпленъ высеребренный кругъ съ градуснымъ дѣленіемъ, а въ серединѣ круга, на шпилѣ, находится магнитная стрѣлка. На днѣ коробки начерченъ діаметръ, находящійся въ коллимаціонной плоскости подвижныхъ діоптровъ; отъ этого діаметра идутъ градусныя подписи отъ 0^0 до 90^0 въ обѣ стороны. Коробка закрывается стекломъ и сверхъ того, при переноскѣ, накрывается мѣдною крышкою. Снизу лимба придѣлана трубочка *c*, кот. надѣвается на штативъ (фиг. 57), состоящій изъ *баксы* и деревяннаго треножника.

Фиг. 57.

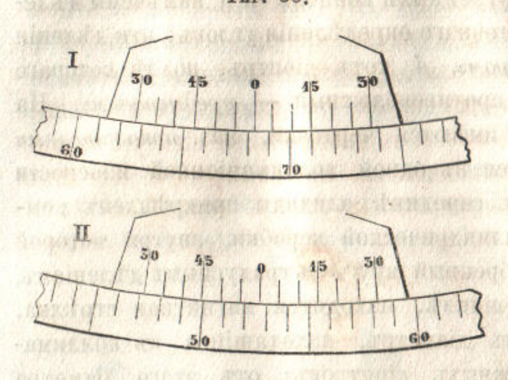


Устройство баксы слѣдующее: къ цилиндру *d*, кот. долженъ плотно входить въ трубочку *c*, придѣланъ мѣдный шаръ *k*, называемый *яблокомъ;* это яблоко помѣщено между двумя шарообразными пустыми половинками, изъ которыхъ одна придѣлана къ цилиндру *l*, а другая прижимается къ ней винтомъ *m*. При ослабленіи этого винта, яблоко можетъ свободно двигаться, а потому астролябія можетъ принять горизонтальное, наклонное и вертикальное положеніе. Бакса надѣвается на выступъ *p*, прикрѣпленный къ треножнику *H*.

Дуга ноніуса, равная дугѣ въ 11^0 лимба, дѣлится на 12 частей; такъ, что разность между градусомъ лимба, и дѣленіемъ ноніуса равна $^1/_{12}$ градуса или $5'$, а потому, въ разсм. случаѣ, уголъ можемъ опредѣлить съ точностью до $5'$. Показатель алида-

ды, т. е. среднее дѣленіе ноніуса, означается 0, а при остальныхъ дѣленіяхъ идутъ подписи съ градусною подписью лимба и расположены, какъ указано на 58 фигурѣ; такимъ образомъ при совпаденіи третьей черты отъ нуля ноніуса (фиг. 58, I) съ градуснымъ дѣленіемъ, уголъ, указываемый показателемъ 0, будетъ равенъ $68^0 15'$, а при совпаденіи съ градуснымъ дѣленіемъ четвертой черты ноніуса отъ 0 (фиг. 58, II), уголъ, опредѣляемый показателемъ, равенъ $52^0 40'$.

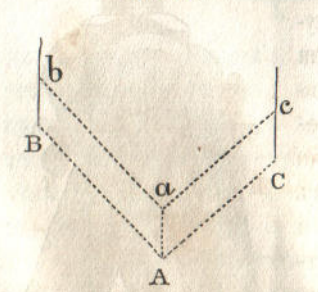
Фиг. 58.



Въ другихъ астролябіяхъ лимбъ дѣлятъ на 360 градусовъ и каждый градусъ пополамъ. Дугу ноніуса берутъ равною 29 дѣленіямъ лимба и дѣлятъ на 30 равныхъ частей; тогда разность между дѣленіемъ лимба и дѣленіемъ ноніуса будетъ $\frac{30'}{30} = 1'$; слѣд. помощію этой астролябіи можно найти уголъ съ точн. до $1'$.

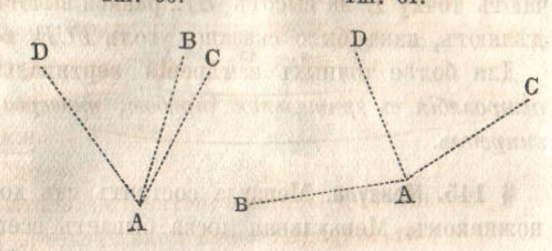
Измѣреніе горизонтальнаго угла помощію астролябіи. Пусть требуется опредѣлить уголъ, составленный направленіями AB и AC.

Фиг. 59.



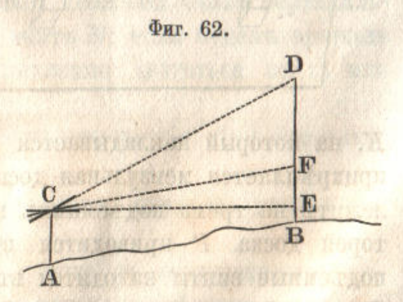
Ставимъ астролябію въ вершину A угла BAC и при томъ такъ, чтобы центръ лимба и точка A находились бы въ одной вертикальной линіи, чего можно достигнуть помощію отвѣса; ослабивъ винтъ m, приводимъ астролябію въ горизонтальное положеніе; послѣ чего закрѣпляемъ этотъ винтъ. Затѣмъ, ослабивъ нажимной винтъ n лимба, поворачиваемъ его на столько, чтобы узкое отверстіе въ одномъ неподвижномъ діоптрѣ, волосокъ въ противоположномъ ему діоптрѣ и предметъ C (визируемый) были бы въ одной плоскости; закрѣпляемъ этотъ винтъ и вращаемъ алидаду до тѣхъ поръ, пока узкій прорѣзъ глазнаго діоптра, волосокъ въ предметномъ діоптрѣ и визируемый предметъ B, не бу-

дутъ лежать въ одной плоскости. Послѣ этого отсчитываютъ по лимбу число градусовъ, начиная отъ 0^0 (при неподвижномъ діоптрѣ) до показателя ноніуса, а число минутъ отсчитываютъ по ноніусу отъ черты его показателя до чертъ совпаденія дѣленія ноніуса съ градуснымъ дѣленіемъ лимба. Замѣтимъ, что если подписи лимба идутъ отъ 0^0 до 360^0 влѣво, то неподвижные діоптры направляютъ на правый предметъ, а подвижные на лѣвый; но, если подписи лимба идутъ вправо, то поступаютъ обратно. Когда измѣряемый уголъ *CBA* будетъ очень малъ, такъ что, при наведеніи, подвижные діоптры закрываютъ собою неподвижные, то надо поступить слѣд. образомъ: взять еще предметъ *D* (фиг. 60) или поставить колъ въ точку *D* и опредѣлить ∠∠ *CAD* и *BAD*; тогда разность этихъ угловъ будетъ искомый уголъ. Когда же опредѣляемый ∠ *CAB* (фиг. 61) будетъ близокъ къ 180^0, то берутъ точку *D* внутри ∠ *CAB* и опредѣляютъ ∠∠ *CAD* и *BAD*; взявъ сумму этихъ угловъ, получимъ искомый ∠ *CAB*.



Фиг. 60. Фиг. 61.

Измѣреніе вертикальнаго угла помощію астролябіи. Пусть требуется опредѣлить вертикальный уголъ, составленный направленіемъ *CD* съ горизонтомъ, т. е. ∠ *DCE*. Ставимъ въ точкѣ *A* астролябію и, ослабивъ нажимательный *m* винтъ баксы, обращаемъ яблоко около стержня этого винта такъ, чтобы лимбъ астролябіи принялъ отвѣсное положеніе, а движеніемъ около цапфы штатива приводимъ лимбъ въ направленіе вертикальной плоскости, проходящей чрезъ *AB* или *BD*. Индексъ алидады ставимъ въ совпаденіе съ дѣленіемъ 90^0 лимба и вращаемъ лимбъ около его оси до тѣхъ поръ, пока нить съ отвѣсомъ, пропущенная чрезъ прорѣзъ верхняго подвижнаго діоптра коснется волоска противоположнаго ему нижняго; тогда



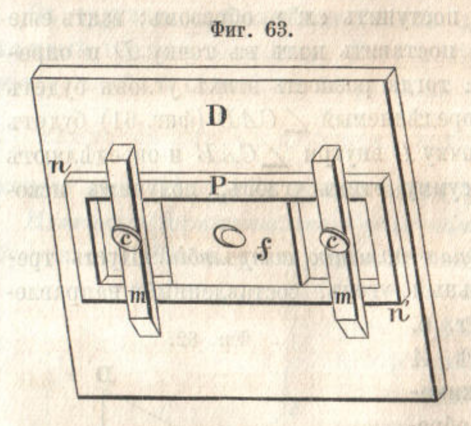
Фиг. 62.

закрѣпляютъ нажимательные винты лимба и баксы. Такимъ образомъ коллимаціонная плоскость подвижныхъ діоптровъ будетъ имѣть отвѣсное положеніе, а коллимаціонная плоскость неподвижныхъ — горизонтальное. Затѣмъ, не сдвигая лимба, направляютъ подвижные діоптры на точку D; тогда показаніе верньера выразитъ величину угла DCE съ точн. до $30'$. Чтобы опредѣлить наклоненіе линіи AB къ горизонту, ставятъ въ точкѣ B вѣху и на ней замѣчаютъ точку E на высотѣ BE, равной высотѣ инструмента, и опредѣляютъ, какъ было сказано, уголъ FCE, кот. и будетъ искомый.

Для болѣе точныхъ измѣреній вертикальныхъ угловъ служатъ: *астролябія съ зрительною трубою*, *универсальные инструменты* и *кипрегель*.

§ 145. Мензула. Мензула состоитъ изъ доски и штатива съ треножникомъ. Мензульная доска бываетъ всегда квадратною, у которой бокъ длиною отъ 12 до 26 дюймовъ, и дѣлается изъ прочнаго и сухаго дерева; на верхней сторонѣ доски натягивается бумага, а къ нижней прикрѣплены винтами c и c, двѣ деревянныя скобы m и m, посредствомъ которыхъ она соединяется со штативомъ мензулы.

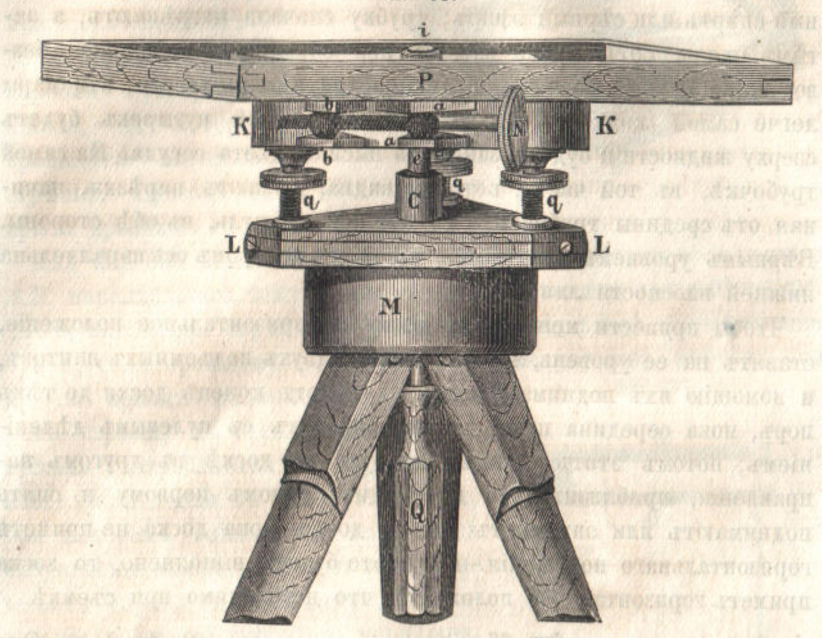
Фиг. 63.



Верхняя часть штатива (фиг. 64) состоитъ изъ круга K, на который накладывается продолговатая доска P; къ кругу прикрѣпляется мензульная доска помощію скобъ m и m. Кругъ K лежитъ на трехъ подъемныхъ винтахъ q, q и q, посредствомъ которой доска P приводится въ горизонтальное положеніе; эти подъемные винты находятся въ углахъ деревяннаго треугольника L, прикрѣпленнаго къ кругу M, къ которому придѣланы ножки штатива. Въ серединѣ круга K проходитъ пустой цилиндръ, закругленный снизу и который сверху прикрѣпленъ къ доскѣ P помощію гайки i, такъ, что доска P можетъ на этомъ цилиндрѣ вращатся въ горизонтальномъ положеніи. Круги K и M соедине-

ны между собою помощію, такъ называемаго, становаго винта *Q*, проходящаго чрезъ середину круга *M*, цилиндра *C* и закрѣпленнаго къ кругу *K*.

Фиг. 63.



Для сообщенія доскѣ *P* небольшаго движенія около вертикальной оси служитъ микрометренный винтъ *N*; если будемъ вращать этотъ винтъ, то доска *P* будетъ медленно двигаться въ ту или другую сторону.

Кромѣ описанной нами мензулы есть еще другія, хотя основанія для ихъ устройства одни и тѣ-же.

Принадлежности мензулы суть: уровень, алидада, мензульная буссоль и вилка съ отвѣсомъ.

1) *Уровень.* Для приведенія инструмента въ горизонтальное положеніе служитъ уровень, устройство котораго слѣдующее: къ линейкѣ *M* прикрѣпленъ мѣдный цилиндръ *D*, пустой внутри и имѣющій сверху

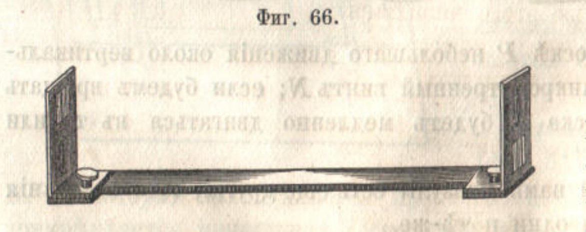
Фиг. 65.



продолговатый разрѣзъ. Внутри этого цилиндра вложена стеклянная трубка, имѣющая сверху правильную кривизну, получающуюся отъ вращенія дуги большаго радіуса около своей хорды, которая называется *осью* уровня; въ эту стеклянную трубку вливаютъ винный спиртъ или сѣрный эфиръ; трубку сначала нагрѣваютъ, а затѣмъ охлаждаютъ, чрезъ что въ ней образуется небольшое безвоздушное пространство, наполненное парами жидкости; эти пары легче самой жидкости и потому безвоздушный пузырекъ будетъ сверху жидкости и будетъ занимать высшее мѣсто сосуда. На самой трубочкѣ, въ той части, которая видна, дѣлаютъ нарѣзки, начиная отъ средины трубочки, гдѣ поставленъ нуль, въ обѣ стороны. Вѣрнымъ уровнемъ называется такой, въ которомъ ось параллельна нижней плоскости линейки.

Чтобы привести мензульную доску въ горизонтальное положеніе, ставятъ на ее уровень, по направленію двухъ подъемныхъ винтовъ, и помощію ихъ поднимаютъ или опускаютъ конецъ доски до тѣхъ поръ, пока середина пузырька не совпадетъ съ нулевымъ дѣленіемъ; потомъ этотъ уровень кладутъ на доскѣ въ другомъ направленіи, приблизительно перпендикулярномъ первому и опять поднимаютъ или опускаютъ конецъ доски, пока доска не приметъ горизонтальнаго положенія. Когда это будетъ выполнено, то доска приметъ горизонтальное положеніе, что необходимо при съемкѣ.

Фиг. 66.

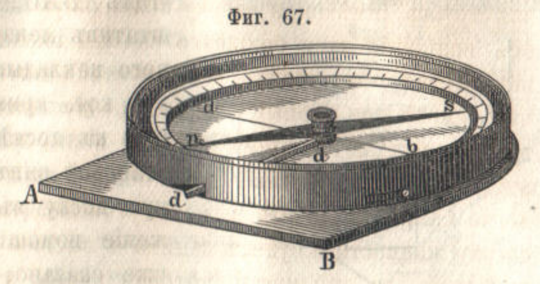


2) *Алидада.* Она служитъ для нанесенія на планѣ горизонтальнаго проложенія прямой или, какъ говорятъ, для *визированія.* Алидада состоитъ изъ мѣдной линейки, длиною отъ 18 до 24 дюймовъ и шириною въ $1^1/_2$ дюйма, на концахъ которой прикрѣплены діоптры, такъ, чтобы узкіе въ нихъ прорѣзы, волоски въ четыреугольныхъ прорѣзахъ и скошенный край линейки лежали бы въ одной плоскости (коллимаціонной), перпендикулярной къ нижней плоскости линейки. Для визированія на дальніе предметы употребляется алидада съ зрительною трубою, называемая *кипрегелемъ.*

3) *Мензульная буссоль* (фиг. 67). Она состоитъ изъ цилиндриче-

ской коробки, діаметра около 4 дюймовъ, а вышиною около $^1/_2$ дюйма.

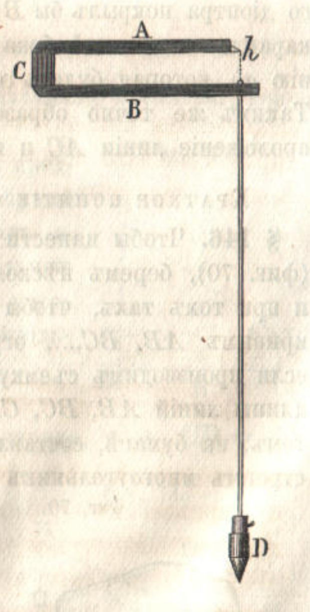
Фиг. 67.



На днѣ коробки прикрѣплено высеребренное кольцо съ градуснымъ дѣленіемъ отъ 0^0 до 360^0, а въ центрѣ дна коробки утвержденъ шпиль, на которомъ вращается магнитная стрѣлка. Буссоль закрыта крышкою со стекломъ.

Для коробки выходитъ въ одну сторону и оканчивается прямою AB, параллельною тому діаметру, кот. проходитъ чрезъ 0^0 и 180^0. Чтобы магнитная стрѣлка не была въ движеніи, имѣется пластинка d и d; если прижмемъ ея конецъ къ выступу дна коробки, то другой конецъ поднимется и прижметъ стрѣлку къ стеклу. Мензульная буссоль употребляется для приведенія мензульной доски въ такое положеніе, при которомъ означаемое на бумагѣ направленіе магнитнаго или географическаго меридіана совпадаетъ дѣйствительно съ плоскостью этого меридіана. Кромѣ того, эта буссоль можетъ служить для опредѣленія азимутовъ линій визированія.

Фиг. 68.

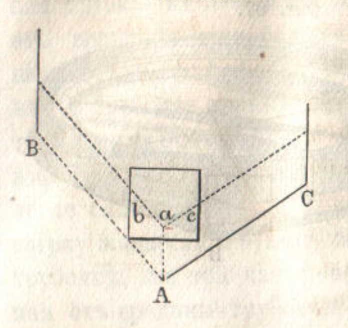


4) *Мензульная вилка* (фиг. 68). Она служитъ для установки мензулы такъ, чтобы точка, данная на доскѣ, была бы расположена отвѣсно надъ соотвѣтствующею точкою мѣстности. Мензульная вилка состоитъ изъ двухъ, соединенныхъ между собою брусковъ A и B, изъ которыхъ верхній короче нижняго и оканчивается остріемъ h, а нижній длиннѣе верхняго и имѣетъ отверстіе противъ h конца верхнаго бруска. Въ это отверстіе продѣта нить, на концѣ которой прикрѣпленъ грузъ D.

Нанесеніе на планъ прямыхъ линій и угловъ помощію мензулы.

Положимъ требуется нанести на планъ прямыя AB и AC, т. е. уголъ BAC. Для этого ставимъ штативъ мензулы въ точку A и на него накладываемъ мензульную доску, кот. прикрѣпляемъ скобами m и m къ доскѣ P штатива; ослабивъ становой винтъ, приводимъ мензульную доску въ горизонтальное положеніе помощію уровня, какъ было уже сказано; потомъ закрѣпляемъ становой винтъ и помощію вилки находимъ на доскѣ положеніе точки a, лежащей на одной вертикальной линіи съ точкою A. Послѣ этого, кладемъ на доску алидаду такъ, чтобы точка a находилась при скошенномъ краѣ алидады и, смотря въ узкое отверстіе діоптра, поворачиваемъ ее на столько, чтобы волосокъ противоположнаго діоптра покрылъ бы B; тогда, придерживая алидаду, проведемъ карандашомъ подлѣ бока алидады (гдѣ точка a) и получимъ линію ab, которая будетъ горизонтальнымъ проложеніемъ линіи AB. Такимъ же точно образомъ нанесемъ на планъ горизонтальное проложеніе линіи AC и получимъ $\angle bac = \angle BAC$.

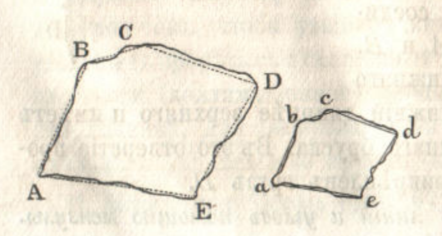
Фиг. 69.



Краткое понятіе о составленіи плана мѣстности.

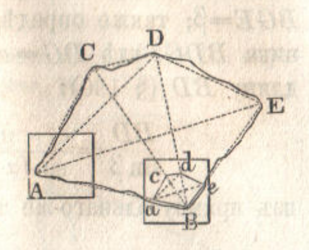
§ 146. Чтобы нанести на планъ контуръ мѣстности $ABCDE$ (фиг. 70), беремъ нѣсколько точекъ A, B, C, D и E на контурѣ и при томъ такъ, чтобы линіи AB, BC.... ближе подходили къ кривымъ AB, BC,..., ограничивающимъ эту мѣстность. Затѣмъ, если производимъ съемку буссолью или астралябіей, то измѣряемъ длины линій AB, BC, CD,... и углы при точкахъ A, B, C,...; потомъ, на бумагѣ, составляемъ масштабъ для линій AB, BC,... и строимъ многоугольникъ $abcde$, подобный данному, откладывая стороны по этому масштабу, а углы по транспортиру. Проведя на глазъ между вершинами многоугольника линіи, сходныя съ тѣми, которыя на мѣстности, получимъ планъ мѣстности $ABCDE$.

Фиг. 70.



Если же производимъ съемку помощію мензулы, то, поставивъ ее въ точку A, наносимъ на планъ горизонтальныя проложенія линій AB, AC, AD и AE; потомъ измѣряемъ длину линіи AB (базиса) и откладываемъ ее по масштабу на горизонтальномъ проложеніи линіи AB отъ точки a и получаемъ часть ab, равную по масштабу линіи AB. Переходимъ съ мензулою въ точку B и ставимъ ее такъ, чтобы точки b и B были бы въ одной вертикальной линіи, а линіи ba и BA находились бы въ одной вертикальной плоскости. При точкѣ B наносимъ также горизонтальныя проложенія линій BC, BD, BE и получаемъ въ пересѣченіи ихъ съ первыми прямыми точки c, d и e. Соединивъ точку a съ c, c съ d, d съ e и e съ b, получимъ горизонтальныя проложенія сторонъ многоугольника $ABCDE$.

Фиг. 71.



РѢШЕНІЕ НѢКОТОРЫХЪ ЗАДАЧЪ НА МѢСТНОСТИ.

§ 147. Задача I. *Опредѣлить высоту доступнаго предмета, стоящаго на горизонтальной плоскости.*

Положимъ, требуется опредѣлить высоту предмета AB. Для этого, поставивъ угломѣрный инструментъ въ точку C, измѣримъ уголъ α, составляемый прямою BD съ горизонтальною прямою; также измѣримъ разстояніе AC, которое означимъ буквою b. Тогда, изъ прямоугольнаго треугольника BDE, получимъ:

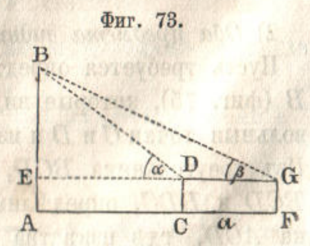
Фиг. 72.

$$BE = DE \,.\, \mathrm{tg}\,\alpha \text{ или } BE = b \,.\, \mathrm{tg}\,\alpha.$$

Придавъ къ BE высоту угломѣрнаго снаряда, т. е. $CD = AE$, получимъ искомую высоту AB.

§ 148. Задача II. *Опредѣлить высоту неприступнаго предмета, полагая, что основаніе предмета и мѣсто наблюдателя находятся въ одной горизонтальной плоскости.*

Фиг. 73.



Положимъ, требуется опредѣлить высоту предмета AB, къ которому по-

дойти нельзя. Поставивъ угломѣрный инструментъ въ точку D, измѣряемъ уголъ $BDE=\alpha$; затѣмъ, въ томъ-же направленіи, возьмемъ еще точку F и, поставивъ здѣсь инструментъ измѣряемъ уголъ $BGE=\beta$; также опредѣлимъ длину $CF=a$. Тогда изъ треугольника BDG, гдѣ $DG=a$, $BGD=\beta$ и $BDG=180^0-\alpha$, найдемъ длину BD (§ 130):

$$\frac{BD}{\sin\beta}=\frac{a}{\sin(\alpha-\beta)} \text{ или } BD=\frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)};$$

изъ прямоугольнаго-же треугольника BDE получимъ:

$$BE=BD\sin\alpha=\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}.$$

Придавъ къ BE высоту угломѣрнаго инструмента, т. е. $CD=AE$, получимъ искомую высоту AB.

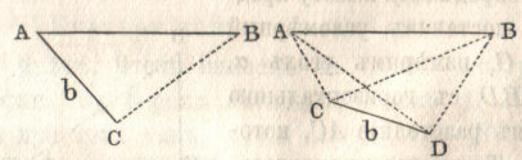
§ 149. Задача III. *Опредѣлить разстояніе между двумя предметами, когда нельзя измѣрить непосредственно разстояніе между ними.*

Здѣсь могутъ быть два случая:

1) *Одинъ изъ предметовъ видимъ, но недоступенъ.*

Положимъ, что требуется опредѣлить разстояніе между предметами A и B, и къ B (фиг. 74) подойти нельзя. Тогда сами выбираемъ на мѣстности какую-либо точку C и измѣряемъ разстояніе $AC=b$ и углы BAC и ACB. Изъ треугольника ABC найдемъ (§ 130):

Фиг. 74. Фиг. 75.



$$\frac{AB}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}; \text{ откуда } AB=\frac{b\sin C}{\sin B}.$$

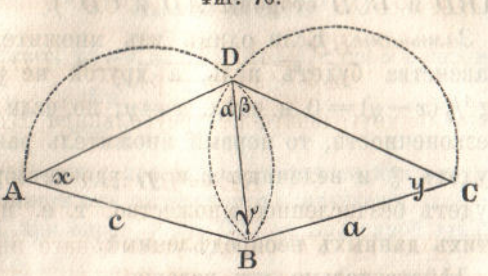
2) *Оба предмета видны, но недоступны.*

Пусть требуется опредѣлить разстояніе между предметами A и B (фиг. 75), которые видны, но недоступны. Возьмемъ двѣ произвольныя точки C и D и измѣримъ углы: ACB, BCD, BDA и ADC. Изъ треугольника BCD, гдѣ извѣстна сторона CD и два угла BCD и BDC, опредѣлимъ сторону BC (§ 130); изъ треугольника ACD, гдѣ извѣстна сторона CD, углы ACD и ADC, опре-

дѣлимъ сторону AC; наконецъ, изъ треугольника ABC, въ которомъ извѣстны стороны AC и BC и уголъ ACB между ними, опредѣлимъ (§ 131) сторону AB. Для повѣрки стороны AB вычисляютъ ее изъ двухъ $\triangle\triangle$ ACB и ADB.

§ 150. Задача 4. *По тремъ даннымъ точкамъ A, B и C, опредѣлить положеніе четвертой точки D, лежащей съ ними въ одной плоскости и изъ которой прямыя AB и BC видны подъ данными углами α и β.*

Фиг. 76.



Графически положеніе точки D опредѣлится пересѣченіемъ круговыхъ сегментовъ, вмѣщающихъ углы α и β и построенныхъ соотвѣтственно на AB и BC. Вычисленіемъ же, положеніе точки D будетъ вполнѣ извѣстно, если найдемъ численныя величины AD и CD. Пусть $AB=c$, $BC=a$, $\angle ABC=\gamma$; также означимъ $\angle BAD$ буквою x и $\angle BCD$ буквою y. Сумма внутреннихъ угловъ четыреугольника равна четыремъ прямымъ, а потому

$$x+y+\alpha+\beta+\gamma=360^0;$$

оттуда

$$x+y=360^0-(\alpha+\beta+\gamma) \text{ или } {}^1/_2(x+y)=180^0-\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}. \quad (1)$$

Изъ треугольниковъ ABD и BCD имѣемъ (§ 130):

$$\frac{BD}{c}=\frac{\sin x}{\sin\alpha} \text{ и } \frac{a}{BD}=\frac{\sin\beta}{\sin y};$$

перемноживъ почленно эти равенства, найдемъ:

$$\frac{a}{c}=\frac{\sin x\sin\beta}{\sin y\sin\alpha}; \text{ откуда } \frac{\sin x}{\sin y}=\frac{a\sin\alpha}{c\sin\beta}.$$

Пусть $\frac{a\sin\alpha}{c\sin\beta}=\operatorname{tg}\varphi$; отсюда φ найдемъ по логариѳмамъ и тогда

$$\frac{\sin x}{\sin y}=\operatorname{tg}\varphi \text{ или } \frac{\sin x-\sin y}{\sin x+\sin y}=\frac{\operatorname{tg}\varphi-1}{\operatorname{tg}\varphi+1} \text{ (§ 51)} =\operatorname{tg}(\varphi-45^0)$$

или (§ 54)

$$\frac{\operatorname{tg}{}^1/_2(x-y)}{\operatorname{tg}{}^1/_2(x+y)}=\operatorname{tg}(\varphi-45^0), \text{ а } \operatorname{tg}{}^1/_2(x-y)=\operatorname{tg}(\varphi-45^0)\operatorname{tg}{}^1/_2(x+y).$$

Подставимъ сюда величину $\frac{1}{2}(x+y)$ и найдемъ равенство:

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(x-y) = \operatorname{tg}(\varphi - 45^0) \operatorname{tg}\left(180^0 - \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\right); \quad . \; . (2)$$

изъ котораго опредѣлимъ величину $\frac{1}{2}(x-y)$. Зная $\frac{1}{2}(x-y)$ и $\frac{1}{2}(x+y)$, найдемъ x и y, а затѣмъ уже изъ треугольниковъ ABD и BCD стороны AD и CD *).

Замѣчаніе. Если одинъ изъ множителей во второй части (2) равенства будетъ нуль, а другой не равенъ безконечности, то $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(x-y) = 0$ и слѣд. $x = y$; но, если второй множитель равенъ безконечности, то первый множитель равенъ нулю и вторая часть будетъ $\frac{0}{0}$ и величинъ x и y, удовлетворяющихъ этому равенству будетъ безчисленное множество, т. е. предложенный вопросъ при этихъ данныхъ неопредѣленный.

Дѣйствительно, изъ условія

$$\operatorname{tg}\left(180^0 - \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\right) = \infty \text{ выходитъ, что } \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} = 90^0$$

или

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0;$$

это показываетъ, что фигура $ABCD$ вписуема въ кругъ, а потому сегменты, вмѣщающіе углы α и β и которые пересѣченіемъ опредѣляли точку D, сливаются. Изъ условія $\frac{a \sin\alpha}{c \sin\beta} = \operatorname{tg}\varphi$, выходитъ, что $\operatorname{tg}\varphi = \frac{a}{\sin\beta} : \frac{c}{\sin\alpha}$; но $\frac{a}{\sin\beta}$ и $\frac{c}{\sin\alpha}$ суть діаметры круговъ, описанныхъ около треугольниковъ ABD и BCD; а такъ какъ эти круги совпали, то діаметры ихъ равны и $\operatorname{tg}\varphi = 1$ или $\varphi = 45^0$, а потому $\operatorname{tg}(\varphi - 45^0) = 0$.

§ 151. При измѣреніи угловъ посредствомъ инструмента, а также и при измѣреніи длины прямыхъ, получаемъ неточную ихъ величину; эта неточность оказываетъ также вліяніе на опредѣляемыя (посредствомъ вычисленія) искомыя части треугольника. Въ нѣкоторыхъ случаяхъ, легко найти предѣлъ погрѣшности въ искомыхъ частяхъ въ зависимости отъ погрѣшности измѣренія линій и угловъ; въ другихъ-же случаяхъ, требуется знаніе дифференціальнаго исчисленія. Напр. въ задачѣ § 147 нашли, что

$$x = b \operatorname{tg}\alpha, \qquad (1)$$

гдѣ x означаетъ длину BE (чер. 72). Положимъ, что истинная величина

---

*) Эта задача наз. *Потенотовою,* потому что Потенотъ предложилъ полное ея рѣшеніе въ 1692 г.

BE есть $x+\varepsilon$, а угла BDE есть $\alpha+\mu$; тогда изъ треугольника BDE имѣемъ:

$$x+\varepsilon=b\operatorname{tg}(\alpha+\mu). \qquad (2)$$

Вычтя почленно (1) равенство изъ (2), найдемъ:

$$\varepsilon=b\,[\operatorname{tg}(\alpha+\mu)-\operatorname{tg}\alpha]=\frac{b\sin\mu}{\cos(\alpha+\mu)\cos\alpha};$$

но для угловъ, меньшихъ прямаго, $\sin\mu<\mu$, а $\cos(\alpha+\mu)<\cos\alpha$ и потому

$$\varepsilon<\frac{b\mu}{\cos^2\alpha}.$$

Изъ этого неравенства опредѣляется предѣлъ погрѣшности при нахожденіи величины BE, въ зависимости отъ погрѣшности опредѣленія угла α.

Отношеніе-же погрѣшности, при опредѣленіи BE, къ найденной длинѣ BE, будетъ:

$$\frac{\varepsilon}{x}<\frac{b\mu}{\cos^2\alpha}:b\operatorname{tg}\alpha \text{ или } \frac{\varepsilon}{x}<\frac{2\mu}{\sin 2\alpha}.$$

ОТДѢЛЪ XI.

Опредѣленіе площадей прямолинейныхъ фигуръ. — Опредѣленіе радіуса круга, вписаннаго и описаннаго около правильнаго многоугольника.

§ 152. Задача I. *Опредѣлить площадь треугольника по двумъ сторонамъ и углу между ними.*

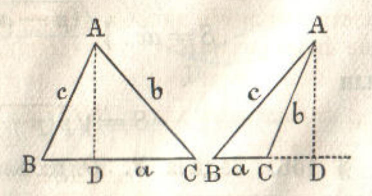
Изъ вершины A въ треугольникѣ ABC (черт. 77) опустимъ перпендикуляръ AD на основаніе BC или продолженіе основанія BC (чер. 78); тогда, означивъ площадь треугольника буквою S, найдемъ:

$$S={}^1\!/_2\,a\,.\,AD;$$

но, изъ прямоугольнаго треугольника ABD: $AD=c\sin B$, а потому

$$S={}^1\!/_2\,ac\sin B,$$

Фиг. 77. Фиг. 78.



т. е. площадь треугольника равна половинѣ произведенія его сторонъ, умноженной на синусъ угла между ними.

§ 153. Задача II. *Опредѣлить площадь треугольника по сторонѣ и двумъ прилежащимъ угламъ.*

Въ предъидущемъ параграфѣ нашли

$$S = {}^1/_2\, ac \sin B;$$

но (§ 117)

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A};\ \text{откуда}\ c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

Слѣдовательно:

$$S = {}^1/_2\, a \,.\, \frac{a \sin C}{\sin A} \,.\, \sin B = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A};$$

а такъ какъ $A = 180^0 - (B + C)$, то поэтому

$$S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin (B + C)}.$$

§ 154. Задача III. *Опредѣлить площадь треугольника по двумъ сторонамъ и углу, противолежащему одной изъ нихъ.*

Опредѣлимъ сначала въ треугольникѣ уголъ, противолежащій другой данной сторонѣ треугольника (§ 137), а потомъ и площадь треугольника по формулѣ § 152.

§ 155. Задача IV. *Опредѣлить площадь треугольника по тремъ его сторонамъ.*

Въ § 152 нашли, что $S = {}^1/_2 ac \sin B$; но (§ 55) $\sin B = 2 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}$

и потому $S = ac \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}$. Въ § 120 имѣли, что

$$\sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}},\ \text{а}\ \cos \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}$$

и слѣдовательно:

$$S = ac \,.\, \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}} \,.\, \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}$$

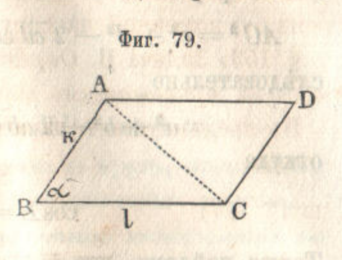
или

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

§ 156. Задача V. *Опредѣлить площадь параллелограмма по двумъ сторонамъ и углу между ними.*

Въ параллелограммѣ $ABCD$ дана сторона $AB=k$, сторона $BC=l$ и уголъ B. Соединивъ прямою точки A и C, найдемъ, что площадь треугольника $ABC = \frac{1}{2}\, kl \sin B$, а площадь параллелограмма $ABCD = 2 \,.\, ABC = 2 \,.\, \frac{1}{2} kl \sin B = kl \sin B$, т. е. площадь параллелограмма равна произведенію двухъ смежныхъ его сторонъ на синусъ угла между ними.

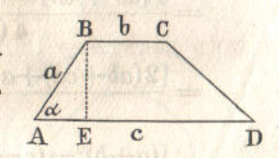
Фиг. 79.



§ 157. Задача VI. *Найти площадь трапеціи по двумъ основаніямъ, одной изъ непараллельныхъ сторонъ и углу, прилежащему къ ней.*

Въ трапеціи $ABCD$ дано: $AB=a$, $BC=b$, $AD=c$ и $\angle BAD = \alpha$.

Фиг. 80.



Тогда, опустивъ изъ точки B перпендикуляръ BE на AD, найдемъ, что площадь трапеціи

$$ABCD = \frac{1}{2}(b+c) \,.\, BE;$$

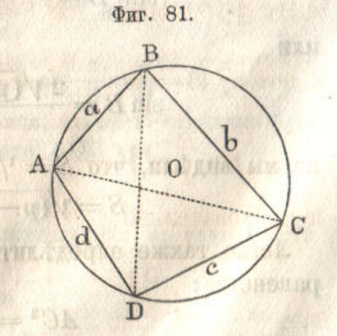
но, изъ прямоугольнаго треугольника ABE, видимъ, что $BE = a \sin \alpha$, а потому площадь трапеціи

$$ABCD = \frac{1}{2}(b+c)\, a \sin \alpha.$$

§ 158. Задача VII. *По даннымъ сторонамъ четыреугольника, вписаннаго въ кругъ, опредѣлить діагонали, углы и площадь этого четыреугольника.*

Въ четыреугольникѣ $ABCD$, вписанномъ въ кругѣ, дано: $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$ и $DA=d$. Проведемъ діагональ AC; тогда площадь четыреугольника, кот. означимъ буквою S, будетъ равна суммѣ площадей треугольниковъ ABC и ADC; слѣдовательно (§ 152) $S = ABC + ADC = \frac{1}{2} ab \sin B + \frac{1}{2} cd \sin D$. Сумма угловъ B и D равна двумъ прямымъ, а потому $\sin D = \sin B$, а $\cos D = -\cos B$ и

Фиг. 81.



$$S = \frac{1}{2}\, ab \sin B + \frac{1}{2}\, cd \sin B = \frac{1}{2}(ab + cd) \sin B.$$

Изъ треугольника ABC имѣемъ (§ 118):

$$AC^2 = a^2 + b^2 - 2\, ab \cos B,$$

а изъ треугольника ADC:

$$AC^2 = c^2 + d^2 - 2\,cd\cos D \text{ или } AC^2 = c^2 + d^2 + 2\,cd\cos B;$$

слѣдовательно

$$a^2 + b^2 - 2\,ab\cos B = c^2 + d^2 + 2\,cd\cos B;$$

откуда

$$\cos B = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2\,(ab + cd)}.$$

Также найдемъ, что

$$\sin^2 B = 1 - \cos^2 B = 1 - \frac{(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2}{4\,(ab + cd)^2} =$$

$$= \frac{4\,(ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2}{4\,(ab + cd)^2}$$

$$= \frac{[2\,(ab + cd) + a^2 + b^2 - c^2 - d^2]\,[2\,(ab + cd) - a^2 - b^2 + c^2 + d^2]}{4\,(ab + cd)^2}$$

$$= \frac{[(a+b)^2 - (c-d)^2]\,[(c+d)^2 - (a-b)^2]}{4\,(ab + cd)^2}$$

$$= \frac{(a+b+c-d)\,(a+b-c+d)\,(c+d+a-b)\,(c+d-a+b)}{4\,(ab + cd)^2}.$$

Положимъ $a + b + c + d = 2p$; тогда $a + b + c - d = 2(p - d)$, $a + b - c + d = 2\,(p - c)$ и т. д.; слѣдовательно

$$\sin^2 B = \frac{16\,(p-d)(p-c)(p-b)(p-a)}{4\,(ab + cd)^2}$$

или

$$\sin B = \frac{2\sqrt{(p-a)\,(p-b)\,(p-c)(p-d)}}{ab + cd};$$

но мы видѣли, что $S = {}^1/_2\,(ab + cd)\sin B$ и потому

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)\,(p-d)}.$$

Легко также опредѣлить длину діагонали AC. Подставивъ въ равенство:

$$AC^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab\cos B$$

вмѣсто $\cos B$ его величину, найдемъ:

$$AC^2 = a^2 + b^2 - \frac{ab\,(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)}{ab + cd} = \frac{(ac + bd)\,(ad + bc)}{ab + cd}.$$

Точно также найдемъ, что

$$BD^2 = \frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc};$$

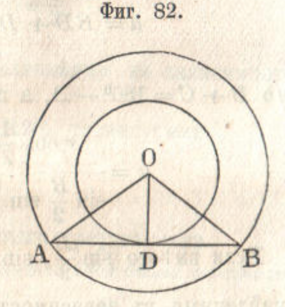
слѣдовательно:

$$AC^2 \cdot BD^2 = (ac+bd)^2 \text{ или } AC \cdot BD = ac+bd,$$

т. е. *во всякомъ четыреугольникѣ, вписанномъ въ кругъ, произведенiе дiагоналей равно суммѣ произведенiй противолежащихъ сторонъ.*

§ 159. Задача VIII. *Опредѣлить площадь правильнаго многоугольника по его сторонѣ, а также по радiусу круга, вписаннаго въ него или описаннаго около него. Также, по данной сторонѣ правильнаго многоугольника, опредѣлить радiусъ круга, вписаннаго или описаннаго около этого многоугольника.*

Фиг. 82.



Пусть AB будетъ сторона правильнаго многоугольника, имѣющаго n сторонъ; O центръ вписаннаго или описаннаго круга около даннаго многоугольника. Означимъ сторону AB буквою a, радiусъ вписаннаго круга буквою r и радiусъ описаннаго круга буквою R. Уголъ AOB составляетъ n-ую часть четырехъ прямыхъ угловъ и потому

$$\angle AOB = \frac{2\pi}{n}, \text{ а } \angle AOD = \frac{1}{2} AOB = \frac{\pi}{n}.$$

Изъ прямоугольнаго треуг. AOD получимъ:

$$OD = AD \operatorname{ctg} AOD \text{ или } r = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} \qquad (1)$$

и

$$AO = AD : \sin AOD \text{ или } R = \frac{a}{2 \sin \frac{\pi}{n}}. \qquad (2)$$

Площадь треугольника

$$AOB = \tfrac{1}{2} AB \cdot OD = \tfrac{1}{2} ar = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} = \frac{a^2}{4} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n};$$

слѣдовательно, площадь даннаго многоугольника, которую означимъ буквою s, будетъ равна n площадямъ треугольника AOB или

$$s = \frac{na^2}{4} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}. \qquad (3)$$

Можно дать выраженiе для площади многоугольника въ зависимости отъ r и R. Изъ (1) и (2) равенствъ имѣемъ:

$$a = 2r \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \text{ и } a = 2R \sin \frac{\pi}{n};$$

подставивъ эти величины въ (3) равенство, найдемъ:

$$s = nr^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{n} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} = nr^2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$$

и

$$s = nR^2 \sin^2 \frac{\pi}{n} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} = nR^2 \sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n} = \frac{nR^2}{2} \sin \frac{2\pi}{n}.$$

§ 160. Задача IX. *Опредѣлить радіусъ круга, вписаннаго въ треугольникъ, по сторонѣ и угламъ треугольника.*

Пусть O означаетъ центръ круга, вписаннаго въ треугольникъ ABC; тогда OA, OB и OC будутъ соотвѣтственно равнодѣлящими угловъ A, B и C, а перпендикуляръ OD, опущенный изъ точки O на сторону BC, будетъ радіусомъ вписаннаго круга. Означимъ сторону BC буквою a, а OD буквою r; тогда изъ прямоугольныхъ треугольниковъ BOD и COD получимъ (§ 116):

Фиг. 83.

$$BD = r\,\mathrm{ctg}\,\frac{B}{2} \text{ и } CD = r\,\mathrm{ctg}\,\frac{C}{2};$$

слѣдовательно

$$a = BD + DC = r\left(\mathrm{c\,g}\,\frac{B}{2} + \mathrm{ctg}\,\frac{C}{2}\right) = \frac{r \sin\frac{B+C}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}};$$

но $B + C = 180^0 - A$, а потому

$$a = \frac{r\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}; \text{ откуда } r = \frac{a\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}.$$

Если вмѣсто $\sin\frac{B}{2}$, $\sin\frac{C}{2}$ и $\cos\frac{A}{2}$ подставимъ ихъ величины (§ 120), найденныя въ зависимости отъ сторонъ a, b и c даннаго треугольника, то получимъ:

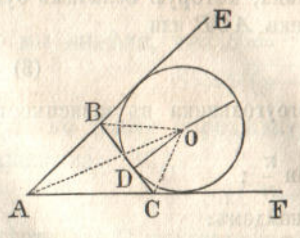
$$r = \frac{s}{p},$$

гдѣ s означаетъ площадь, а p — полупериметръ даннаго треугольника.

§ 161. Задача X. *Опредѣлить радіусъ внѣ-вписаннаго круга*) въ треугольникъ по сторонѣ и угламъ треугольника.*

Пусть O означаетъ центръ внѣ-вписаннаго круга, касающагося стороны BC и продолженій сторонъ AB и AC; тогда, прямыя OA, OB и OC будутъ соотвѣтственно равнодѣлящими угловъ: A, EBC и FCB, а перпендикуляръ OD, опущенный изъ точки O на сторону BC, будетъ радіусомъ круга. Означимъ сторону BC буквою a, а OD — буквою r_a; изъ прямоугольныхъ треугольниковъ BOD и COD получимъ:

Фиг. 84.



*) *Внѣ-вписаннымъ* кругомъ въ треугольникъ называется такой кругъ, который касается стороны треугольника и продолженій двухъ другихъ сторонъ.

$$BD = r_a \operatorname{ctg} {}^1/_2 EBC = r_a \operatorname{ctg} {}^1/_2 (180^0 - B) = r_a \operatorname{tg} \frac{B}{2}$$

и
$$DC = r_a \operatorname{ctg} {}^1/_2 FCB = r_a \operatorname{ctg} {}^1/_2 (180^0 - C) = r_a \operatorname{tg} \frac{C}{2};$$

но $a = BD + DC$, а потому

$$a = r_a \left(\operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \right) = \frac{r_a \sin \frac{B+C}{2}}{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}.$$

Такъ какъ $B + C = 180^0 - A$, то поэтому

$$a = \frac{r_a \cos \frac{A}{2}}{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}; \text{ откуда } r_a = \frac{a \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2}}.$$

Если $\cos \frac{A}{2}$, $\cos \frac{B}{2}$ и $\cos \frac{C}{2}$ замѣнимъ ихъ величинами въ зависимости отъ сторонъ a, b и c даннаго треугольника (§ 120), то получимъ:

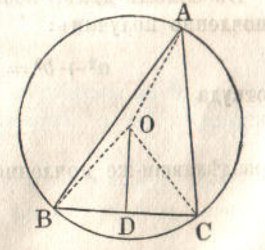
$$r_a = \frac{s}{p - a},$$

гдѣ p означаетъ периметръ, а s — площадь даннаго треугольника.

§ 162. Задача XI. *Опредѣлить радіусъ круга, описаннаго около треугольника, въ которомъ даны три его стороны.*

Пусть точка O будетъ центръ круга, описаннаго около треугольника ABC; тогда $OA = OB = OC$. Изъ точки O опустимъ перпендикуляръ OD на BC, кот. пройдетъ чрезъ D середину стороны BC; означимъ радіусъ описаннаго круга буквою R, а сторону BC — буквою a. Уголъ $BOC = 2\,BAC$, а потому уголъ $BOD = BAC$ или $BOD = A$; слѣдовательно, изъ прямоугольнаго треугольн. BOD, получимъ:

Фиг. 85.



$$BD = BO \, . \sin BOD$$

или $\frac{a}{2} = R \sin A$; откуда $R = \frac{a}{2 \sin A}$.

Означимъ сторону AB буквою c, а сторону AC буквою b и площадь треугольника ABC буквою s; получимъ (§ 152):

$$s = \frac{bc \sin A}{2}; \text{ откуда } \sin A = \frac{2s}{bc} \text{ и слѣд. } R = \frac{abc}{4s}.$$

ОТДѢЛЪ XII.

Введеніе тригонометрическихъ величинъ въ мнимыя выраженія. — Умноженіе и дѣленіе мнимыхъ выраженій. — Теорема Моавра. — Разложеніе синуса, косинуса и тангенса въ ряды. — Рѣшеніе двучленныхъ уравненій. — Суммированіе нѣкоторыхъ тригонометрическихъ рядовъ.

§ 163. Введеніе тригонометрическихъ величинъ въ мнимыя выраженія. Общій видъ мнимаго выраженія есть:

$$a + b\sqrt{-1}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

гдѣ a и b дѣйствительныя числа.

Этому выраженію можно дать другой видъ, положивъ:

$$a = \rho\cos\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2) \text{ и } b = \rho\sin\varphi; \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

такія положенія возможны, потому что всегда можно найти для ρ положительную величину, а для угла φ величину, меньшую 2π, которыя удовлетворяли бы (2) и (3) равенствамъ.

Въ самомъ дѣлѣ, возведя въ квадратъ (2) и (3) равенства и сложивъ почленно получимъ:

$$a^2 + b^2 = \rho^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) \text{ или } a^2 + b^2 = \rho^2;$$

откуда

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

раздѣливши-же почленно (3) равенство на (2), найдемъ:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Изъ равенствъ (4) и (5) можно будетъ опредѣлить величины ρ и φ.

Выраженіе (1) при $a = \rho\cos\varphi$ и $b = \rho\sin\varphi$ приметъ видъ:

$$\rho(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi),$$

гдѣ ρ положительное число, а $\varphi < 2\pi$. Число ρ наз. *модулемъ*, а уголъ φ *аргументомъ* этого мнимаго выраженія.

§ 164. Умноженіе и дѣленіе мнимыхъ выраженій. Дано умножить два выраженія:

$$\rho(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi) \text{ и } \rho'(\cos\varphi' + \sqrt{-1}\sin\varphi');$$

произведя умноженіе по правилу умноженія многочленовъ и замѣтивъ, что $\sqrt{-1}.\ \sqrt{-1} = -1$, найдемъ:

$$\rho\rho'(\cos\varphi\cos\varphi' + \sqrt{-1}\,.\,\sin\varphi\cos\varphi' + \sqrt{-1}\,.\,\cos\varphi\sin\varphi' - \sin\varphi\sin\varphi')$$
$$= \rho\rho'[\cos\varphi\cos\varphi' - \sin\varphi\sin\varphi' + \sqrt{-1}(\sin\varphi\cos\varphi' + \cos\varphi\sin\varphi')]$$
$$= \rho\rho'[\cos(\varphi+\varphi') + \sqrt{-1}\sin(\varphi+\varphi')];$$

откуда слѣдуетъ правило: *чтобы умножить одно мнимое выраженіе на другое, надо перемножить ихъ модули и сложить аргументы.*

Предъидущее правило очевидно справедливо, когда множителей и болѣе двухъ. Для примѣра, найдемъ произведеніе трехъ мнимыхъ выраженій: $\rho(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)$, $\rho'(\cos\varphi' + \sqrt{-1}\sin\varphi')$ и $\rho''(\cos\varphi'' + \sqrt{-1}\sin\varphi'')$.

Перемноживъ первыя два выраженія найдемъ:

$$\rho\rho'[\cos(\varphi+\varphi') + \sqrt{-1}.\sin(\varphi+\varphi')];$$

помноживъ-же это выраженіе на $\rho''(\cos\varphi'' + \sqrt{-1}\sin\varphi'')$, найдемъ, по предъидущему правилу:

$$\rho\rho'\rho''[\cos(\varphi+\varphi'+\varphi'') + \sqrt{-1}.\sin(\varphi+\varphi'+\varphi'')].$$

§ 165. Положимъ дано раздѣлить выраженіе $\rho(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)$ на $\rho'(\cos\varphi' + \sqrt{-1}\sin\varphi')$; получимъ:

$$\frac{\rho(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)}{\rho'(\cos\varphi' + \sqrt{-1}\sin\varphi')}.$$

Умноживъ числителя и знаменателя дроби на $\cos\varphi' - \sqrt{-1}\sin\varphi'$, найдемъ:

$$\frac{\rho(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)(\cos\varphi' - \sqrt{-1}\sin\varphi')}{\rho'(\cos^2\varphi' + \sin^2\varphi')} =$$
$$= \frac{\rho}{\rho'}[\cos(\varphi-\varphi') + \sqrt{-1}.\sin(\varphi-\varphi')].$$

Слѣдовательно, *чтобы раздѣлить одно мнимое выраженіе на другое, надо модуль дѣлимаго раздѣлить на модуль дѣлителя, а изъ аргумента дѣлимаго вычесть аргументъ дѣлителя.*

§ 166. Теорема Моавра. *Для всякаго n цѣлаго или дробнаго, положительнаго или отрицательнаго,* $\cos n\vartheta + \sqrt{-1}\sin n\vartheta$ *будетъ одна изъ величинъ выраженія:* $(\cos\vartheta + \sqrt{-1}\sin\vartheta)^n$.

Эту теорему разсмотримъ послѣдовательно: 1) для n цѣлаго и положительнаго; 2) для n цѣлаго и отрицательнаго и 3) для n дробнаго.

1) *n цѣлое и положительное число.* Тогда

$$(\cos\vartheta + \sqrt{-1}\sin\vartheta)^n = (\cos\vartheta + \sqrt{-1}\sin\vartheta)(\cos\vartheta + \sqrt{-1}\sin\vartheta)\ \ldots$$
$$\ldots\ (\cos\vartheta + \sqrt{-1}\sin\vartheta)\ (n \text{ разъ})$$

или (§ 164)

$$(\cos\vartheta + \sqrt{-1}\sin\vartheta)^n = \cos(\vartheta+\vartheta+\ldots) + \sqrt{-1}\,.\,\sin(\vartheta+\vartheta+\ldots)$$
$$= \cos n\vartheta + \sqrt{-1}\sin n\vartheta.$$

2) *n цѣлое и отрицательное число.* Положимъ $n = -m$; тогда

$$(\cos \vartheta + \sqrt{-1} \sin \vartheta)^n = (\cos \vartheta + \sqrt{-1} \sin \vartheta)^{-m} =$$

$$= \frac{1}{(\cos \vartheta + \sqrt{-1} \sin \vartheta)^m} = \frac{1}{(\cos m\vartheta + \sqrt{-1} \sin m\vartheta)};$$

умноживъ числителя и знаменателя дроби на $\cos m\vartheta - \sqrt{-1} \sin m\vartheta$, найд.

$$(\cos \vartheta + \sqrt{-1} \sin \vartheta)^{-m} = \frac{\cos m\vartheta - \sqrt{-1} \sin m\vartheta}{\cos^2 m\vartheta + \sin^2 m\vartheta} = \cos m\vartheta - \sqrt{-1} \sin m\vartheta,$$

потому что $\cos^2 m\vartheta + \sin^2 m\vartheta = 1$.

Выраженіе-же $\cos m\vartheta - \sqrt{-1} \sin m\vartheta$ можетъ быть написано такъ (§ 30): $\cos(-m\vartheta) + \sqrt{-1} \sin(-m\vartheta)$ и потому

$$(\cos \vartheta + \sqrt{-1} \sin \vartheta)^{-m} = \cos(-m\vartheta) + \sqrt{-1} \sin(-m\vartheta)$$

или, подставивъ n вмѣсто $-m$, найдемъ:

$$(\cos \vartheta + \sqrt{-1} \sin \vartheta)^n = \cos n\vartheta + \sqrt{-1} \sin n\vartheta.$$

Извлекая корень n-ой степени изъ обѣихъ частей равенства $(\cos \vartheta + \sqrt{-1} \sin \vartheta)^n = \cos n\vartheta + \sqrt{-1} \sin n\vartheta$, получимъ, что $\cos \vartheta + \sqrt{-1} \sin \vartheta$ есть одна изъ величинъ $\sqrt[n]{\cos n\vartheta + \sqrt{-1} \sin n\vartheta}$, гдѣ n цѣлое число; слѣд.

$$(\cos n\vartheta + \sqrt{-1} \sin n\vartheta)^{\frac{1}{n}} = \cos \vartheta + \sqrt{-1} \sin \vartheta,$$

гдѣ аргументъ ϑ очевидно равенъ аргументу $n\vartheta$, умноженному на $\frac{1}{n}$.

3) *n дробное число.* Положимъ $n = \frac{p}{q}$, гдѣ p и q цѣлыя числа; тогда

$$(\cos \vartheta + \sqrt{-1} \sin \vartheta)^n = (\cos \vartheta + \sqrt{-1} \sin \vartheta)^{\frac{p}{q}} = [(\cos \vartheta + \sqrt{-1} \sin \vartheta)^p]^{\frac{1}{q}} =$$

$$= (\cos p\vartheta + \sqrt{-1} \sin p\vartheta)^{\frac{1}{q}} = \cos \frac{p\vartheta}{q} + \sqrt{-1} \sin \frac{p\vartheta}{q};$$

но $\frac{p}{q} = n$, а потому

$$(\cos \vartheta + \sqrt{-1} \sin \vartheta)^n = \cos n\vartheta + \sqrt{-1} \sin n\vartheta.$$

§ 167. Мы видѣли, что при n дробномъ, $\cos n\vartheta + \sqrt{-1} \sin n\vartheta$ есть одна изъ величинъ $(\cos \vartheta + \sqrt{-1} \sin \vartheta)^n$. Теперь покажемъ, какъ опредѣлить всѣ величины $(\cos \vartheta + \sqrt{-1} \sin \vartheta)^n$, гдѣ n дробное число, равное $\frac{p}{q}$, гдѣ p и q цѣлыя числа.

Величины $\sin \vartheta$ и $\cos \vartheta$ будутъ одинаковы, если круговую мѣру ϑ увеличимъ на $2\pi r$, гдѣ r цѣлое число, т. е. $\cos \vartheta = \cos(\vartheta + 2\pi r)$ и $\sin \vartheta = \sin(\vartheta + 2\pi r)$; слѣдовательно

$$(\cos \vartheta + \sqrt{-1} \sin \vartheta)^{\frac{p}{q}} = [\cos(\vartheta + 2\pi r) + \sqrt{-1} \sin(\vartheta + 2\pi r)]^{\frac{p}{q}}$$

$$= \cos \frac{p(\vartheta + 2\pi r)}{q} + \sqrt{-1} \sin \frac{p(\vartheta + 2\pi r)}{q}.$$

Полагая $r=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, увидимъ, что первая часть этого равенства будетъ безъ перемѣны, а вторая будетъ имѣть только q различныхъ значеній, полученныхъ отъ первыхъ q значеній числа r, т. е. для $r=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ и $q-1$; потому что, если дадимъ r, значеніе большее $q-1$, то выраженіе $\cos\frac{p(\vartheta+2\pi r)}{q}+\sqrt{-1}\sin\frac{p(\vartheta+2\pi r)}{q}$ приведется къ такому, гдѣ $r<q-1$. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ $r=mq+s$, гдѣ m и s числа цѣлыя и $s<q$; тогда

$$\cos\frac{p}{q}(\vartheta+2\pi r)=\cos\left[\frac{p}{q}(\vartheta+2s\pi)+2mp\pi\right]=\cos\frac{p}{q}(\vartheta+2s\pi),\ \text{гдѣ } s<q,$$

$$\text{и } \sin\frac{p}{q}(\vartheta+2\pi r)=\sin\left[\frac{p}{q}(\vartheta+2s\pi)+2mp\pi\right]=\sin\frac{p}{q}(\vartheta+2s\pi),\ \text{гдѣ } s<q.$$

Слѣдовательно всѣ значенія для $(\cos\vartheta+\sqrt{-1}\sin\vartheta)^{\frac{p}{q}}$ будутъ:

$$\cos\frac{p\vartheta}{q}+\sqrt{-1}\sin\frac{p\vartheta}{q},\ \cos\frac{p(\vartheta+2\pi)}{q}+\sqrt{-1}\sin\frac{p(\vartheta+2\pi)}{q},$$

$$\cos\frac{p(\vartheta+4\pi)}{q}+\sqrt{-1}\sin\frac{p(\vartheta+4\pi)}{q},\ \ldots\ \text{и}$$

$$\cos\frac{p[\vartheta+2(q-1)\pi]}{q}+\sqrt{-1}\sin\frac{p[\vartheta+2(q-1)\pi]}{q}.$$

Слѣдствіе I. Положивъ $\vartheta=0$ и $p=1$, найдемъ, что $(\cos 0+\sqrt{-1}\sin 0)^{\frac{1}{q}}=$ $=\sqrt[q]{1}$ имѣетъ q различныхъ значеній, заключающихся въ формулѣ:

$$\cos\frac{2r\pi}{q}+\sqrt{-1}\sin\frac{2r\pi}{q},$$

гдѣ r можно давать значенія: $0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ и $q-1$.

Эту формулу можно написать еще иначе. Положивъ $r=q-t$, гдѣ t цѣлое число, меньшее q, получимъ:

$$\cos\frac{2r\pi}{q}=\cos\frac{2(q-t)\pi}{q}=\cos\left(2\pi-\frac{2t\pi}{q}\right)=\cos\frac{2t\pi}{q}$$

и

$$\sin\frac{2r\pi}{q}=\sin\frac{2(q-t)\pi}{q}=\sin\left(2\pi-\frac{2t\pi}{q}\right)=-\sin\frac{2t\pi}{q};$$

слѣдовательно

$$\cos\frac{2\pi r}{q}+\sqrt{-1}\sin\frac{2r\pi}{q}=\cos\frac{2t\pi}{q}-\sqrt{-1}\sin\frac{2t\pi}{q}.$$

Отсюда выходитъ, что всѣ различныя значенія $\sqrt[q]{1}$ заключаются въ формулѣ:

$$\cos\frac{2r\pi}{q}+\sqrt{-1}\sin\frac{2r\pi}{q},$$

гдѣ для r можемъ давать цѣлыя значенія: $0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ до $\frac{q}{2}$ или $\frac{q-1}{2}$ включительно, смотря потому, будетъ ли q четное или нечетное.

Примѣръ. Найти $\sqrt[4]{1}$. Для этого надо въ предъидущемъ выраженіи положить $q=4$, а $r=0$, 1 и 2; слѣдов. $\sqrt[4]{1}$ равенъ: $\cos 0 \pm \sqrt{-1}\sin 0=1$, $\cos\frac{\pi}{2} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{2} = \pm\sqrt{-1}$ и $\cos\pi \pm \sqrt{-1}\sin\pi = -1$.

Слѣдствіе 2. Положивъ $\vartheta=\pi$ и $p=1$, найдемъ, что $(\cos\pi + \sqrt{-1}\sin\pi)^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{-1}$ имѣетъ q различныхъ значеній, заключающихся въ формулѣ:

$$\cos\frac{(2r+1)\pi}{q} + \sqrt{-1}\sin\frac{(2r+1)\pi}{q},$$

гдѣ r есть цѣлое число, равное: 0, 1, 2, . . . и $q-1$.

Эту формулу можно написать иначе. Въ самомъ дѣлѣ, если положимъ:

$$r = q-1-t, \text{ гдѣ } t < q-1,$$

то найдемъ:

$$\cos\frac{(2r+1)\pi}{q} = \cos\left[2\pi - \frac{(2t+1)\pi}{q}\right] = \cos\frac{(2t+1)\pi}{q}$$

и $$\sin\frac{(2r+1)\pi}{q} = \sin\left[2\pi - \frac{(2t+1)\pi}{q}\right] = -\sin\frac{(2t+1)\pi}{q};$$

слѣдовательно

$$\cos\frac{(2r+1)\pi}{q} + \sqrt{-1}\sin\frac{(2r+1)\pi}{q} = \cos\frac{(2t+1)\pi}{q} - \sqrt{-1}\sin\frac{(2t+1)\pi}{q}.$$

Отсюда выходитъ, что всѣ значенія $\sqrt[q]{-1}$ заключаются въ формулѣ:

$$\cos\frac{(2r+1)\pi}{q} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{(2r+1)\pi}{q},$$

гдѣ для r можемъ давать цѣлыя значенія: 0, 1, 2, 3, . . . до $\frac{q-2}{2}$ или $\frac{q-1}{2}$ включительно, смотря потому, будетъ ли q четное или нечетное число.

Примѣръ. Найти $\sqrt[3]{-1}$. Въ предъидущемъ выраженіи положимъ $q=1$, а r равнымъ 0 и $\frac{3-1}{2}=1$; слѣдов. $\sqrt[3]{-1}$ равенъ $\cos\frac{\pi}{3} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{-1}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{3}$ и $\cos\pi \pm \sqrt{-1}\sin\pi = -1$.

Слѣдствіе 3. Если требуется опредѣлить всѣ значенія $\sqrt[q]{a+b\sqrt{-1}}$, то положивъ (§ 163) $a=\rho\cos\varphi$ и $b=\rho\sin\varphi$, найдемъ:

$$\sqrt[q]{a+b\sqrt{-1}} = \sqrt[q]{\rho(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)} = \sqrt[q]{\rho}.(\cos\frac{\varphi+2r\pi}{q} + \sqrt{-1}\sin\frac{\varphi+2r\pi}{q}),$$

гдѣ для r можемъ давать цѣлыя значенія: 0, 1, 2, . . . и $q-1$.

§ 168. Разложеніе $\sin n\vartheta$, $\cos n\vartheta$ и $\operatorname{tg} n\vartheta$ по степенямъ $\sin\vartheta$, $\cos\vartheta$ и $\operatorname{tg}\vartheta$. Въ предъидущемъ § нашли, что

$$\cos n\vartheta + \sqrt{-1}\sin n\vartheta = (\cos\vartheta + \sqrt{-1}\sin\vartheta)^n.$$

Возвысивъ $\cos\vartheta+\sqrt{-1}\sin\vartheta$ въ n — ую степень *), получимъ:

$$\cos n\vartheta+\sqrt{-1}\sin n\vartheta=\cos^n\vartheta+n\sqrt{-1}\cos^{n-1}\vartheta\sin\vartheta+$$

$$-\frac{n(n-1)}{1.2}\cos^{n-2}\vartheta\sin^2\vartheta-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\sqrt{-1}\cos^{n-3}\vartheta\sin^3\vartheta+\ldots..$$

Такъ какъ при равенствѣ двухъ мнимыхъ выраженій ихъ дѣйствительныя части, такъ же какъ и мнимыя, равны между собою, то, изъ предъидущаго равенства, найдемъ:

$$\cos n\vartheta=\cos^n\vartheta-\frac{n(n-1)}{1.2}\cos^{n-2}\vartheta\sin^2\vartheta+$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\cos^{n-4}\vartheta\sin^4\vartheta-\ldots,$$

а

$$\sin n\vartheta=n\cos^{n-1}\vartheta\sin\vartheta-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cos^{n-3}\vartheta\sin^3\vartheta+$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5}\cos^{n-5}\vartheta\sin^5\vartheta-\ldots\ldots..$$

Смотря потому, будетъ ли n четное или нечетное, послѣдніе члены въ этихъ равенствахъ будутъ различны. Дѣйствительно, если n четное, то послѣдній членъ въ разложеніи $(\cos\vartheta+\sqrt{-1}\sin\vartheta)^n$ будетъ дѣйствительнымъ и равнымъ $(\sqrt{-1})^n\sin^n\vartheta$, а предпослѣдній членъ будетъ мнимымъ и равнымъ: $n(\sqrt{-1})^{n-1}\cos\vartheta\sin^{n-1}\vartheta=\sqrt{-1}\,n(\sqrt{-1})^{n-2}\cos\vartheta\sin^{n-1}\vartheta$; слѣдовательно, если n четное число, то послѣдній членъ для $\cos n\vartheta$ будетъ $(\sqrt{-1})^n\sin n\vartheta$, а послѣдній членъ для $\sin n\vartheta$ будетъ $n(\sqrt{-1})^{n-2}\cos\vartheta\sin^{n-1}\vartheta$.

Когда n нечетное число, то послѣдній членъ въ разложеніи $(\cos\vartheta+$ $+\sqrt{-1}\sin\vartheta)^n$ будетъ мнимый и равный $(\sqrt{-1})^n\sin^n\vartheta$, а предпослѣдній членъ будетъ дѣйствительный и равный $n(\sqrt{-1})^{n-1}\cos\vartheta\sin^{n-1}\vartheta$; слѣдовательно, при n нечетномъ, послѣдній членъ въ разложеніи $\cos n\vartheta$ будетъ $n(\sqrt{-1})^{n-1}\cos\vartheta\sin^{n-1}\vartheta$, а послѣдній членъ въ разложеніи $\sin n\vartheta$ будетъ $(\sqrt{-1})^n\sin^n\vartheta$.

§ 169. Легко теперь опредѣлить $\operatorname{tg} n\vartheta$:

$$\operatorname{tg}n\vartheta=\frac{\sin n\vartheta}{\cos n\vartheta}=\frac{n\cos^{n-1}\vartheta\sin\vartheta-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cos^{n-3}\vartheta\sin^3\vartheta+\ldots\ldots}{\cos^n\vartheta-\frac{n(n-1)}{1.2}\cos^{n-2}\vartheta\sin^2\vartheta+\ldots\ldots};$$

раздѣливъ всѣ члены въ числителѣ и знаменателѣ на $\cos^n\vartheta$, получимъ:

$$\operatorname{tg}n\vartheta=\frac{n\operatorname{tg}\vartheta-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\operatorname{tg}^3\vartheta+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5}\operatorname{tg}^5\vartheta-\ldots}{1-\frac{n(n-1)}{1.2}\operatorname{tg}^2\vartheta+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\operatorname{tg}^4\vartheta-\ldots.}$$

---

*) По формулѣ Ньютона имѣемъ: $(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2+$ $+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^{n-3}b^3+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}a^{n-4}b^4+\ldots\ldots..$

Намъ извѣстны (§ 168) послѣдніе члены въ разложеніи $\cos n\vartheta$ и $\sin n\vartheta$ при n четномъ и n нечетномъ, а потому найдемъ, что, при n четномъ, послѣдній членъ въ числителѣ будетъ $n(\sqrt{-1})^{n-2}\,\mathrm{tg}^{n-1}\vartheta$, а послѣдній членъ въ знаменателѣ $(\sqrt{-1})^{n}\,\mathrm{tg}^{n}\vartheta$; при n нечетномъ послѣдній членъ въ числителѣ будетъ $(\sqrt{-1})^{n-1}\,\mathrm{tg}^{n}\vartheta$, а въ знаменателѣ $n(\sqrt{-1})^{n-1}\,\mathrm{tg}^{n-1}\vartheta$.

§ 170. Разложеніе $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ по степенямъ α. Изъ выраженій для $\sin n\vartheta$ и $\cos n\vartheta$, данныхъ въ предъидущемъ параграфѣ, можно вывести разложеніе для $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.

Для n цѣлаго и положительнаго имѣемъ (§ 168):

$$\sin n\vartheta = n\cos^{n-1}\vartheta\sin\vartheta - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cos^{n-3}\vartheta\sin^3\vartheta + \ldots\ldots$$

и $$\cos n\vartheta = \cos^n\vartheta - \frac{n(n-1)}{1.2}\cos\vartheta^{n-2}\sin^2\vartheta + \ldots\ldots\ldots$$

Положивъ $n\vartheta = \alpha$, гдѣ α конечная величина, найдемъ: $\vartheta = \frac{\alpha}{n}$.

Изъ этого равенства видимъ, что когда n увеличивается безпредѣльно, то ϑ уменьшается безпредѣльно, и когда $n=\infty$, то $\vartheta = 0$; кромѣ того, изъ равенства $n\vartheta=\alpha$ имѣемъ: $n=\frac{\alpha}{\vartheta}$; слѣдовательно, подставивъ въ предъидущія равенства $\frac{\alpha}{\vartheta}$ вмѣсто n найдемъ:

$$\sin\alpha = \alpha\cos^{n-1}\vartheta\frac{\sin\vartheta}{\vartheta} - \frac{\alpha(\alpha-\vartheta)(\alpha-2\vartheta)}{1.2.3}\cos^{n-3}\vartheta\left(\frac{\sin\vartheta}{\vartheta}\right)^3 + \ldots\ldots$$

и $$\cos\alpha = \cos^n\vartheta - \frac{\alpha(\alpha-\vartheta)}{1.2}\cos^{n-2}\vartheta\left(\frac{\sin\vartheta}{\vartheta}\right)^2 + \ldots\ldots\ldots$$

При безпредѣльномъ увеличеніи n, ϑ стремится къ своему предѣлу—нулю; $\frac{\sin\vartheta}{\vartheta}$ стремится къ 1 и $\cos\vartheta$ къ 1; поэтому, положивъ въ предъидущихъ равенствахъ $n=\infty$, найдемъ:

$$\sin\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{1.2.3} + \frac{\alpha^5}{1.2.3.4.5} - \ldots\ldots\ldots$$

и $$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{1.2} + \frac{\alpha^4}{1.2.3.4} - \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Въ предъидущихъ выраженіяхъ для $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, α есть круговая мѣра угла, а потому, если желаемъ получить sin и cos угла въ m^0, то должны, во вторыхъ частяхъ этихъ равенствъ, поставить вмѣсто α дробь $\frac{m\pi}{180}$ (§ 13); получимъ:

$$\sin m^0 = \frac{m\pi}{180} - \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{m\pi}{180}\right)^3 + \frac{1}{1.2.3.4.5}\left(\frac{m\pi}{180}\right)^5 - \ldots\ldots\ldots$$

и $$\cos m^0 = 1 - \frac{1}{1.2}\left(\frac{m\pi}{180}\right)^2 + \frac{1}{1.2.3.4}\left(\frac{m\pi}{180}\right)^4 - \ldots.$$

Найденные ряды для $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ будутъ сходящимися при всякой величинѣ α; дѣйствительно, n-ый членъ въ рядѣ для $\sin\alpha$ будетъ $\frac{(-1)^{n-1}\alpha^{2n-1}}{1.2.3\ldots(2n-1)}$, а $(n+1)$-ый членъ $\frac{(-1)^{n}\alpha^{2n+1}}{1.2.3\ldots2n.(2n+1)}$;

слѣдовательно численная величина отношенія $(n+1)$-го члена къ n-ому будетъ: $\frac{\alpha^2}{2n(2n+1)}$, гдѣ для n можно всегда взять такое значеніе, при которомъ предъидущая дробь будетъ менѣе единицы, потому что α есть конечная величина, а n можетъ увеличиваться неопредѣленно.

Также можно показать, что рядъ и для $\cos\alpha$ будетъ сходящійся.

§ 171. Формулы § 170 для разложенія sin и cos можно найти по способу неопредѣленныхъ коэффиціентовъ. Положимъ:

$$\sin\alpha = a + b\alpha + c\alpha^2 + d\alpha^3 + e\alpha^4 + \ldots\ldots$$
$$\cos\alpha = A + B\alpha + C\alpha^2 + D\alpha^3 + E\alpha^4 + \ldots\ldots$$

гдѣ a, b, c,..., A, B, C,... будутъ числа, независимыя отъ α.

Такъ какъ $\sin 0^0 = 0$, а $\cos 0^0 = 1$, то, положивъ въ предъидущихъ равенствахъ $\alpha = 0$, найдемъ:

$$0 = a \text{ и } 1 = A;$$

поэтому

$$\sin\alpha = \quad b\alpha + c\alpha^2 + d\alpha^3 + e\alpha^4 + \ldots \quad (1)$$
$$\cos\alpha = 1 + B\alpha + C\alpha^2 + D\alpha^3 + E\alpha^4 + \ldots \quad (2)$$

Пусть β будетъ какая нибудь другая круговая мѣра; тогда также будемъ имѣть, что

$$\sin\beta = \quad b\beta + c\beta^2 + d\beta^3 + e\beta^4 + \ldots \quad (3)$$
$$\cos\beta = 1 + B\beta + C\beta^2 + D\beta^3 + E\beta^4 + \ldots \quad (4)$$

Вычтемъ (3) равенство изъ (1) и (4) изъ (2):

$$\sin\alpha - \sin\beta = b(\alpha-\beta) + c(\alpha^2-\beta^2) + d(\alpha^3-\beta^3) + e(\alpha^4-\beta^4) + \ldots$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = B(\alpha-\beta) + C(\alpha^2-\beta^2) + D(\alpha^3-\beta^3) + E(\alpha^4-\beta^4) + \ldots$$

и раздѣливъ каждое изъ этихъ равенствъ на $\alpha - \beta$, получимъ:

$$\frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\alpha-\beta} = b + c(\alpha+\beta) + d(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2) + e(\alpha^3+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta^3) + \ldots (5)$$
$$\frac{\cos\alpha - \cos\beta}{\alpha-\beta} = B + C(\alpha+\beta) + D(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2) + E(\alpha^3+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta^3) + \ldots (6)$$

Если положимъ въ этихъ равенствахъ $\alpha = \beta$, то первая часть (5) равенства обратится (§ 87) въ $\cos\alpha$, а первая часть (6) равенства въ $-\sin\alpha$ и тогда

$$\cos\alpha = b + 2c\alpha + 3d\alpha^2 + 4e\alpha^3 + \ldots \quad (7)$$
$$-\sin\alpha = B + 2C\alpha + 3D\alpha^2 + 4E\alpha^3 + \ldots \quad (8)$$

Сравнивъ эти равенства съ (1) и (2) увидимъ, что

$$1 + B\alpha + C\alpha^2 + D\alpha^3 + \ldots = b + 2c\alpha + 3d\alpha^2 + 4e\alpha^3 + \ldots$$
$$-b\alpha - c\alpha^2 - d\alpha^3 - \ldots = B + 2C\alpha + 3D\alpha^2 + 4E\alpha^3 + \ldots$$

Эти равенства должны существовать при всѣхъ значеніяхъ α; а это возможно, когда коэффиціенты при одинакихъ степеняхъ α равны. Получимъ:

$$b=1, \qquad B=0$$
$$2c=B, \qquad 2C=-b$$
$$3d=C, \qquad 3D=-c$$
$$4e=D,\ldots \qquad 4E=-d,\ldots$$

Изъ этихъ равенствъ находимъ послѣдовательно

$$b=1, \qquad B=0,$$
$$c=0, \qquad C=-\frac{1}{1.2},$$
$$d=-\frac{1}{1.2.3}, \qquad D=0,$$
$$e=0, \qquad E=-\frac{1}{1.2.3.4},$$
$$f=\frac{1}{1.2.3.4.5}, \ldots \qquad F=0, \ldots$$

Подставляя эти величины коэффиціентовъ въ (1) и (2) равенства, найдемъ:

$$\sin\alpha=\alpha-\frac{\alpha^3}{1.2.3}+\frac{\alpha^5}{1.2.3.4.5}-\ldots$$

$$\cos\alpha=1-\frac{\alpha^2}{1.2}+\frac{\alpha^4}{1.2.3.4}-\ldots$$

§ 172. Рѣшеніе двучленныхъ уравненій вида: $x^m=a$, гдѣ a можетъ быть дѣйствительнымъ или мнимымъ, а m цѣлое число. *Первый случай.* a дѣйствительное положительное число. Положивъ въ уравненіи $x^m=a$, $x=y\sqrt[m]{a}$, найдемъ:

$$(y\sqrt[m]{a})^m=a, \text{ или } y^m.\,a=a \text{ или } y^m=1,$$

откуда (§ 167) $\quad y=\sqrt[m]{1}=\cos\frac{2r\pi}{m}\pm\sqrt{-1}\sin\frac{2r\pi}{m},$

гдѣ давая для r цѣлыя значенія 0, 1, 2, ... до $\frac{m}{2}$ или $\frac{m-1}{2}$ включительно, получимъ m различныхъ значеній для y. Такъ какъ $x=y\sqrt[m]{a}$, то слѣдовательно

$$x=\sqrt[m]{a}\left(\cos\frac{2r\pi}{m}\pm\sqrt{-1}\sin\frac{2r\pi}{m}\right);$$

откуда получимъ m значеній для x, давая r цѣлыя значенія 0, 1, 2. . . до $\frac{m}{2}$ или $\frac{m-1}{2}$ включительно, смотря потому будетъ ли m четное или нечетное число.

Примѣръ. Рѣшить уравненіе $x^3=2$. Получимъ:

$$x=\sqrt[3]{2}.\left(\cos\frac{2r\pi}{3}\pm\sqrt{-1}\sin\frac{2r\pi}{3}\right),$$

гдѣ r равно 0 и 1; слѣдовательно

$$x_1 = \sqrt[3]{2},\ {}_2x_3 = \sqrt[3]{2}\,(\cos 120^0 \pm \sqrt{-1}\ \sin 120^0) = \sqrt[3]{2}.\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}.$$

§ 173. *Второй случай. a* дѣйствительное и отрицательное число, равное $-b$.

Тогда, положивъ въ уравненіи: $x^m = -b$, $x = y\sqrt[m]{b}$, получимъ:

$$(y\sqrt[m]{b})^m = -b \text{ или } y^m = -1:$$

откуда (§ 167)

$$y = \sqrt[m]{-1} = \cos\frac{(2r+1)\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{(2r+1)\pi}{m},$$

гдѣ r равно 0, 1, 2, ... до $\frac{m-2}{2}$ или $\frac{m-1}{2}$ включительно, смотря будетъ-ли m четное или нечетное. Слѣдовательно

$$x = \sqrt[m]{b}\left[\cos\frac{(2r+1)\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{(2r+1)\pi}{m}\right];$$

откуда получимъ m различныхъ значеній для x, полагая r равнымъ 0, 1, 2,... и $\frac{m-2}{2}$, если m четное, и равнымъ 0, 1, 2, . . . $\frac{m-1}{2}$, если m нечетное число.

Примѣръ. Рѣшить уравненіе: $x^5 + 10 = 0$. На основаніи предъидущаго получимъ:

$$x = \sqrt[5]{10}.\left[\cos\frac{(2r+1)\pi}{5} \pm \sqrt{-1}\frac{(2r+1)\pi}{5}\right],$$

гдѣ r равно 0, 1 и 2; слѣдовательно

$$x = \sqrt[5]{10}.\left(\cos\frac{\pi}{5} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt[5]{10}\,(\cos 36^0 \pm \sqrt{-1}\sin 36^0)$$

$$= \sqrt[5]{10}.\ \frac{1+\sqrt{5} \pm \sqrt{2\sqrt{5}-10}}{4};$$

$$x = \sqrt[5]{10}\left(\cos\frac{3\pi}{5} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{3\pi}{5}\right) = \sqrt[5]{10}\,(\cos 108^0 \pm \sqrt{-1}\sin 108^0)$$

$$= \sqrt[5]{10}.\ \frac{1-\sqrt{5} \pm \sqrt{-2\sqrt{5}-10}}{4}$$

и $$x = \sqrt[5]{10}\,(\cos\pi \pm \sqrt{-1}\ \sin\pi) = -\sqrt[5]{10}.$$

§ 174. *Третій случай. a* мнимое и равно $p + q\sqrt{+1}$.

Положивъ въ уравненіи: $x^m = p + q\sqrt{-1}$ (§ 163) $p = \rho\cos\varphi$ и $q = \rho\sin\varphi$, гдѣ $\rho = \sqrt{p^2 + q^2}$, а φ опредѣляется изъ уравненія: $\operatorname{tg}\varphi = \frac{q}{p}$, найдемъ:

$$x^m = \rho\,(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi);\ \text{ откуда }\ x = \sqrt[m]{\rho\,(\cos\varphi + \sqrt{-1}\ \sin\varphi)}$$

или (§ 167) $$x = \sqrt[m]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi + 2r\pi}{m} + \sqrt{-1}\sin\frac{\varphi + 2r\pi}{m}\right),$$

гдѣ r цѣлое число, равное 0, 1, 2, ... и $m - 1$.

§ 175. Легко также рѣшить и уравненіе:

$$x^{2m}+px^m+q=0.$$

Въ самомъ дѣлѣ, изъ этого уравненія имѣемъ:

$$x^m=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q} \text{ и } x^m=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q};$$

откуда x уже легко опредѣлить (§ 167).

§ 176. Суммированіе нѣкоторыхъ тригонометрическихъ рядовъ. *Найти сумму синусовъ для угловъ, составляющихъ ариѳметическую прогрессію.*

Положимъ требуется опредѣлить сумму n членовъ:

$$\sin\alpha+\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+2\beta)\ldots+\sin[\alpha+(n-1)\beta].$$

Имѣемъ (§ 54):

$$2\sin{}^1\!/_2\beta\sin\alpha=\cos(\alpha-{}^1\!/_2\beta)-\cos(\alpha+{}^1\!/_2\beta),$$
$$2\sin{}^1\!/_2\beta\sin(\alpha+\beta)=\cos(\alpha+{}^1\!/_2\beta)-\cos(\alpha+{}^3\!/_2\beta),$$
$$2\sin{}^1\!/_2\beta\sin(\alpha+2\beta)=\cos(\alpha+{}^3\!/_2\beta)-\cos(\alpha+{}^5\!/_2\beta),$$

. . . .

$$2\sin{}^1\!/_2\beta\sin[\alpha+(n-1)\beta]=\cos\left(\alpha+\frac{2n-3}{2}\beta\right)-\cos\left(\alpha+\frac{2n-1}{2}\beta\right).$$

Сложивъ почленно эти равенства и означимъ сумму даннаго ряда буквою S, получимъ:

$$2S\,.\sin\frac{\beta}{2}=\cos\left(\alpha-\frac{1}{2}\beta\right)-\cos\left(\alpha+\frac{2n-1}{2}\beta\right),$$

или (§ 54) $$2S\,.\sin\frac{\beta}{2}=2\sin\left(\alpha+\frac{n-1}{2}\beta\right)\sin\frac{n\beta}{2};$$

откуда $$S=\frac{\sin\left(\alpha+\frac{n-1}{2}\beta\right)\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}.$$

Положивъ въ данномъ рядѣ $\beta=\alpha$, найдемъ:

$$\sin\alpha+\sin2\alpha+\sin3\alpha+\ldots+\sin n\alpha=\frac{\sin\frac{n+1}{2}\alpha\,.\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

§ 177. *Найти сумму косинусовъ для угловъ, составляющихъ ариѳметическую прогрессію.*

Требуется найти сумму n членовъ:

$$\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+2\beta)+\ldots+\cos[\alpha+(n-1)\beta].$$

Имѣемъ (§ 54):

$$2\sin{}^1\!/_2\beta\cos\alpha=\sin(\alpha+{}^1\!/_2\beta)-\sin(\alpha-{}^1\!/_2\beta),$$
$$2\sin{}^1\!/_2\beta\cos(\alpha+\beta)=\sin(\alpha+{}^3\!/_2\beta)-\sin(\alpha+{}^1\!/_2\beta),$$
$$2\sin{}^1\!/_2\beta\cos(\alpha+2\beta)=\sin(\alpha+{}^5\!/_2\beta)-\sin(\alpha+{}^3\!/_2\beta),$$

. . . .

$$2\sin{}^1\!/_2\beta\cos[\alpha+(n-1)\beta]=\sin\left(\alpha+\frac{2n-1}{2}\beta\right)-\sin\left(\alpha+\frac{2n-3}{2}\beta\right).$$

Означивъ искомую сумму буквою S и сложивъ почленно эти равенства, найдемъ:

$$2S \cdot \sin\frac{\beta}{2} = \sin\left(\alpha + \frac{2n-1}{2}\beta\right) - \sin\left(\alpha - \frac{1}{2}\beta\right),$$

или (§ 54) $$2S \cdot \sin\frac{\beta}{2} = 2\cos\left(\alpha + \frac{n-1}{2}\beta\right)\sin\frac{n\beta}{2};$$

откуда $$S = \frac{\cos\left(\alpha + \frac{n-1}{2}\beta\right)\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}.$$

Если положимъ $\beta = \alpha$, то найдемъ:

$$\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \ldots + \cos n\alpha = \frac{\cos\frac{n+1}{2}\alpha \cdot \sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

§ 178. *Найти сумму n членовъ:*

$$\operatorname{cosec}\alpha + \operatorname{cosec} 2\alpha + \operatorname{cosec} 4\alpha + \ldots + \operatorname{cosec} 2^{n-1}\alpha.$$

Имѣемъ (§ 64, примѣчаніе):

$$\operatorname{cosec}\alpha = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{ctg}\alpha,$$

$$\operatorname{cosec} 2\alpha = \operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg} 2\alpha,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\operatorname{cosec} 2^{n-1}\alpha = \operatorname{ctg} 2^{n-2}\alpha - \operatorname{ctg} 2^{n-1}\alpha.$$

Означимъ искомую сумму буквою S, найдемъ:

$$S = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{ctg} 2^{n-1}\alpha.$$

§ 179. *Найти сумму n членовъ:*

$$\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2^2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2^2} + \ldots\ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2^{n-1}}.$$

Имѣемъ (§ 56, примѣръ III):

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\alpha - 2\operatorname{ctg} 2\alpha,$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{ctg}\alpha,$$

$$\frac{1}{2^2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2^2} = \frac{1}{2^2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2^2} - \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{2^{n-1}}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^{n-2}}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2^{n-2}}$$

Означивъ искомую сумму буквою S, получимъ:

$$S = \frac{1}{2^{n-1}}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2^{n-1}} - 2\operatorname{ctg} 2\alpha.$$

ОТДѢЛЪ XIII.

О круговыхъ функціяхъ.

§ 180. Опредѣленія. Возьмемъ уравненіе: $\sin x = a$; здѣсь x есть *круговая мѣра угла, котораго синусъ равенъ* a, что выражаютъ такъ: $x = \text{arc}\sin a$ *); слѣдовательно, если имѣемъ выраженіе $\text{arc}\,\text{tg}\, a$, то его надо читать такъ: круговая мѣра угла, котораго тангенсъ равенъ a. Выраженія $\text{arc}\sin a$, $\text{arc}\cos a$, $\text{arc}\,\text{tg}\, a$ и т. д. наз. *круговыми функціями* и выговариваются такъ: *арксинусъ а, арккосинусъ а, арктангенсъ а* и т. д.

Такъ какъ угловъ, имѣющихъ ту же тригонометрическую величину, безчисленное множество, то поэтому выраженія: $\text{arc}\sin a$, $\text{arc}\cos a$ и т. д. имѣютъ безчисленное множество значеній для даннаго числа a.

§ 181. Если дана величина a, то легко выразить круговую функцію въ градусахъ, минутахъ и секундахъ. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ требуется $\text{arc}\,\text{tg}\, a$ выразить въ градусахъ, минутахъ и секундахъ; для этого, положимъ $\text{arc}\,\text{tg}\, a = x$; тогда увидимъ, что x есть круговая мѣра угла, котораго тангенсъ равенъ a, т. е. $\text{tg}\, x = a$; откуда, по логариѳмамъ тригонометрическихъ величинъ, опредѣлимъ наименьшее (независимо отъ знака) значеніе для x. Зная-же наименьшее значеніе для x, опредѣлимъ и общее выраженіе для x.

Примѣръ I. Найти наименьшую величину $\text{arc}\,\text{ctg}\, 2{,}5$.
Положивъ $\text{arc}\,\text{ctg}\, 2{,}5 = x$, найдемъ: $\text{ctg}\, x = 2{,}5$, а $\lg \text{ctg}\, x = \lg 2{,}5 = 0{,}3979400$; откуда $x = 21^0\, 48'\, 5'',07$ съ точностью до $0'',01$.

Примѣръ II. Опредѣлить $\sin(\text{arc}\,\text{tg}\, 0{,}2)$.
Положивъ $\text{arc}\,\text{tg}\, 0{,}2 = x$, найдемъ: $\text{tg}\, x = 0{,}2$ и $x = 11^0\, 18'\, 35'',76$; слѣдовательно $\sin(\text{arc}\,\text{tg}\, 0{,}2) = \sin 11^0\, 18'\, 35'',76 = 0{,}1961162$.

Примѣръ III. Опредѣлить $\text{arc}\sin(\cos 16^0\, 18'')$.
Положивъ $\text{arc}\sin(\cos 16^0\, 18'') = x$, найдемъ: $\sin x = \cos 16^0\, 18''$, а слѣдовательно (§ 45) $x = n\pi + (-1)^n.\, 73^0\, 59'\, 42''$, гдѣ n цѣлое число.

§ 182. Свойства круговыхъ функцій. Свойства круговыхъ функцій легко могутъ быть выведены на основаніи свойствъ тригонометрическихъ функцій, что видно изъ послѣдующаго.

---

*) arc есть три начальныя буквы слова arcus — дуга.

I) Сумма наименьшихъ значеній $\arc\sin a$ *и* $\arc\cos a$, *также какъ* $\arc \operatorname{tg} a$ *и* $\arc \operatorname{ctg} a$, *также какъ* $\arc \sec a$ *и* $\arc \operatorname{cosec} a$, *равна* $\frac{\pi}{2}$.

Въ самомъ дѣлѣ, положивъ $\arc\sin a = x$, найдемъ: $\sin x = a$; но $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, а потому $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = a$ и (§ 180) $\frac{\pi}{2} - x = \arc\cos a$; слѣдовательно

$$\arc\sin a + \arc\cos a = \frac{\pi}{2}.$$

Точно также докажемъ, что

$$\arc \operatorname{tg} a + \arc \operatorname{ctg} a = \frac{\pi}{2} \text{ и } \arc\sec a + \arc \operatorname{cosec} a = \frac{\pi}{2}.$$

II) Одну изъ круговыхъ функцій всегда можно выразить въ зависимости отъ другой круговой функціи.

Примѣръ I. Требуется $\arc\sin a$ выразить по $\arc \operatorname{tg}$. Положивъ, $\arc\sin a = x$, найдемъ: $\sin x = a$; но

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{a}{\sqrt{1 - a^2}}; \text{ откуда } x = \arc \operatorname{tg} \frac{a}{\sqrt{1 - a^2}}.$$

И такъ

$$\arc\sin a = \arc \operatorname{tg} \frac{a}{\sqrt{1 - a^2}}.$$

Примѣръ II. Выразить $\arc\sec a$ по $\arc\cos$. Положивъ:

$$\arc\sec a = x, \text{ найдемъ: } \sec x = a;$$

но $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ или $a = \frac{1}{\cos x}$; откуда $\cos x = \frac{1}{a}$ и $x = \arc\cos\frac{1}{a}$; слѣдовательно $\arc\sec a = \arc\cos\frac{1}{a}$.

§ 183. Сложеніе и вычитаніе круговыхъ функцій. Покажемъ здѣсь сложеніе и вычитаніе только одноименныхъ круговыхъ функцій, потому что всегда можемъ (§ 182, II) сдѣлать круговыя функціи одноименными.

I. Найти $\arc\sin a \pm \arc\sin b$. Положимъ:

$$\arc\sin a = x, \ \arc\sin b = y;$$

тогда

$$\sin x = a, \ \sin y = b;$$

но $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$, а потому

$$\sin(x \pm y) = a\sqrt{1 - b^2} \pm b\sqrt{1 - a^2};$$

откуда

$$x \pm y = \arc\sin(a\sqrt{1 - b^2} \pm b\sqrt{1 - a^2}).$$

И такъ

$$\arc\sin a \pm \arc\sin b = \arc\sin(a\sqrt{1 - b^2} \pm b\sqrt{1 - a^2}) \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

II. Найти $\arc\cos a \pm \arc\cos b$. Поступая также, какъ въ предъидущемъ случаѣ, найдемъ:

$$\arccos a \pm \arccos a = \arccos\left[ab \mp \sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}\right] \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

III. Найти $\operatorname{arc\,tg} a \pm \operatorname{arc\,tg} b$. Положивъ:

$$\operatorname{arc\,tg} a = x, \ \operatorname{arc\,tg} b = y;$$

найдемъ, что

$$\operatorname{tg} x = a, \ \operatorname{tg} y = b \ \text{ и } \ \operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} = \frac{a \pm b}{1 \mp ab};$$

откуда

$$x \pm y = \operatorname{arc\,tg} \frac{a \pm b}{1 \mp ab} \ \text{ или } \ \operatorname{arc\,tg} a \pm \operatorname{arc\,tg} b = \operatorname{arc\,tg} \frac{a \pm b}{1 \mp ab} \ . \ . \ . (3)$$

Примѣръ. Найти $\operatorname{arc\,tg} {}^1/_2 + \operatorname{arc\,tg} {}^1/_3$. Положивъ въ предъидущемъ равенствѣ: $a = {}^1/_2$ и $b = {}^1/_3$, получимъ: $\operatorname{arc\,tg} {}^1/_2 + \operatorname{arc\,tg} {}^1/_3 = \operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{\pi}{4}$.

IV. Найти $\operatorname{arc\,ctg} a \pm \operatorname{arc\,ctg} b$. Найдемъ:

$$\operatorname{arc\,ctg} a \pm \operatorname{arc\,ctg} b = \operatorname{arc\,ctg} \frac{ab \mp 1}{a \pm b} \ . \quad . \quad . \quad (4)$$

§ 184. Умноженіе круговой функціи на цѣлое число. Произведеніе круговой функціи на цѣлое число n можно представить въ видѣ суммы n круговыхъ функцій, и тогда, пользуясь формулами предъидущаго параграфа, представить искомое произведеніе въ видѣ круговой функціи.

Напр. найти $3 \operatorname{arc\,tg} a$. Имѣемъ:

$$3 \operatorname{arc\,tg} a = \operatorname{arc\,tg} a + \operatorname{arc\,tg} a + \operatorname{arc\,tg} a;$$

положивъ (§ 183) въ (3) формулѣ $b = a$, найдемъ:

$$2 \operatorname{arc\,tg} a = \operatorname{arc\,tg} \frac{2a}{1-a^2};$$

слѣдов.

$$3 \operatorname{arc\,tg} a = \operatorname{arc\,tg} \frac{2a}{1-a^2} + \operatorname{arc\,tg} a;$$

положивъ въ (3) формулѣ (§ 183) $b = \frac{2a}{1-a^2}$, найдемъ:

$$3 \operatorname{arc\,tg} a = \operatorname{arc\,tg} \frac{3a - a^3}{1 - 3a^2}.$$

Точно также можно найти и $4 \arcsin a$ и т. д.

§ 185. Дѣленіе круговой функціи на цѣлое число. Пусть, напримѣръ, дано опредѣлить $\frac{1}{n} \arcsin a$. Положивъ $\frac{1}{n} \arcsin a = x$, найдемъ: $\arcsin a = nx$ или $\sin nx = a$. Изъ этого уравненія, на основаніи § 55, можно опредѣлить $\sin x$ по a; откуда уже легко найти и x. Эту задачу не всегда можемъ рѣшить помощію элементарной алгебры.

Примѣръ. Найти $\frac{\arccos a}{4}$. Положивъ $\frac{\arccos a}{4} = x$, найдемъ: $\arccos a = 4x$ и $\cos 4x = a$. Но (§ 55) $\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1 = 2(2\cos^2 x - 1) - 1 = 4\cos^2 x - 3$; слѣдовательно $4\cos^2 x - 3 = a$; откуда $\cos x = \pm \frac{\sqrt{a+3}}{2}$ и $x = \arccos \pm \left(\frac{\sqrt{a+3}}{2}\right)$. И такъ $\frac{\arccos a}{4} = \arccos \pm \left(\frac{\sqrt{a+3}}{2}\right)$.

§ 186. Разложеніе $\operatorname{arc\,tg} x$ **по степенямъ** x. Разложимъ $\operatorname{arc\,tg} x$ по степенямъ x по способу неопредѣленныхъ коэффиціентовъ и для этого положимъ:

$$\operatorname{arc\,tg} x = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots\ldots$$

Но при $x=0$, $\operatorname{arc\,tg} 0^0 = 0$, а потому $A=0$ и

$$\operatorname{arc\,tg} x = Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots\ldots \quad (1);$$

такимъ же образомъ:

$$\operatorname{arc\,tg} y = By + Cy^2 + Dy^3 + Ey^4 + \ldots\ldots \quad (2).$$

Вычтя (2) равенство изъ (1) и раздѣливъ обѣ части на $x-y$, найдемъ:

$$\frac{\operatorname{arc\,tg} x - \operatorname{arc\,tg} y}{x-y} = B + C(x+y) + D(x^2+xy+y^2) + \ldots \quad (3).$$

Если положимъ $x=y$, то первая часть приметъ видъ $\frac{0}{0}$, а потому, чтобы найти истинное значеніе этой дроби, положимъ:

$$\operatorname{arc\,tg} x = u,\ \operatorname{arc\,tg} y = v;$$

тогда $x = \operatorname{tg} u$, $y = \operatorname{tg} v$ и

$$\frac{\operatorname{arc\,tg} x - \operatorname{arc\,tg} y}{x-y} = \frac{u-v}{\operatorname{tg} u - \operatorname{tg} v} = \frac{(u-v)\cos u \cos v}{\sin(u-v)}.$$

Если $x=y$, то $u=v$, а предѣлъ отношенія

$$\frac{\sin(u-v)}{u-v} \text{ или } \frac{u-v}{\sin(u-v)} \text{ равенъ (§ 69) } 1;$$

слѣд. предѣлъ $\dfrac{\operatorname{arc\,tg} x - \operatorname{arc\,tg} y}{x-y} = \cos^2 u = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 u} = \dfrac{1}{1+x^2}$.

И такъ, при $x=y$, равенство (3) приметъ видъ:

$$\frac{1}{1+x^2} = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + \ldots.$$

Произведя на самомъ дѣлѣ дѣленіе 1 на $1+x^2$, получимъ:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots\ldots$$

и слѣд.

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots\ldots = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + \ldots;$$

откуда, сравнивъ коэффиціенты при одинакихъ степеняхъ x, найдемъ:

$$B=1,\ C=0,\ D=-\frac{1}{3},\ E=0,\ F=\frac{1}{5},\ \ldots$$

и (1)

$$\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots\ldots \quad (4)$$

Этотъ рядъ будетъ сходящійся для $x^2 < 1$; помощію его можно вычислить π съ какою угодно точностью.

Мы знаемъ, что $\operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{\pi}{4}$, а потому, положивъ въ (4) равенствѣ

$x = 1$, найдемъ:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots.$$

Хотя π изъ этого равенства и можно вычислить съ какимъ угодно числомъ знаковъ, но только потребуется вычислить весьма большое число членовъ, чтобы получить π съ большою точностью; поэтому, пользуются другими разложеніями, выведенными изъ формулы для $\operatorname{arc\,tg} x$.

Пусть a и b будутъ двѣ дуги, кот. сумма равна $\frac{\pi}{4}$; если $\operatorname{tg} a = \frac{1}{2}$, то $\operatorname{tg} b = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - a\right) = \frac{1}{3}$ и потому

$$a = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2},\ b = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3} \text{ и } \frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}.$$

Разложивъ $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}$ и $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}$ по (4) формулѣ, найдемъ:

$$\frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{5.2^5} - \ldots\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} - \ldots\right)$$

Эта формула принадлежитъ Эйлеру. Но Machin нашелъ для $\frac{\pi}{4}$ еще болѣе сходящійся рядъ, а слѣд. еще болѣе удобный для вычисленія π.

Пусть a и b будутъ двѣ дуги, для которыхъ:

$$4a - b = \frac{\pi}{4};$$

положивъ $\operatorname{tg} a = \frac{1}{5}$, найдемъ, что

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{2\operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a} = \frac{5}{12},\ \operatorname{tg} 4a = \frac{2\operatorname{tg} 2a}{1 - \operatorname{tg}^2 2a} = \frac{120}{119};\ \text{но } b = 4a - \frac{\pi}{4},$$

а

$$\operatorname{tg} b = \operatorname{tg}\left(4a - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg} 4a - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1 + \operatorname{tg} 4a \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{239}.$$

Изъ равенствъ: $\operatorname{tg} a = \frac{1}{5}$, $\operatorname{tg} b = \frac{1}{239}$ и $4a - b = \frac{\pi}{4}$, слѣдуетъ, что

$$a = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5},\ b = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{239} \text{ и } \frac{\pi}{4} = 4\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5} - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{239}.$$

Разложимъ $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5}$ и $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{239}$ по (4) формулѣ, получимъ:

$$\frac{\pi}{4} = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} - \ldots\right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3.239^3} + \frac{1}{5.239^5} - \ldots\right)$$

Достаточно вычислить 11 членовъ первой группы и 3 члена второй, чтобы получить π съ 15 десятичными знаками, а именно

$$\pi = 3{,}141592653589793.$$

СОБРАНІЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХЪ ЗАДАЧЪ.

Задачи на введеніе.

1. Выразить въ минутахъ величину дуги, равной радіусу.

2. Выразить въ секундахъ величину дуги, равной радіусу.

3. Найти круговую мѣру угловъ въ 60^0 и 135^0.

4. Круговыя мѣры угловъ будутъ: $^7/_{12}\,\pi$, $1{,}48\,\pi$ и $4^3/_7\,\pi$; выразить величины этихъ угловъ въ градусахъ, минутахъ и секундахъ.

Опредѣлить круговую мѣру угловъ (5—16):

5. 37^0. **6.** 270^0. **7.** $42'36''$. **8.** $35^0 18'$. **9.** $23'',086$.

10. $5^0 24' 46''$. **11.** $196^0 53' 7''$. **12.** $49^0 38'',16$. **13.** $212^0 7' 3'',08$.

14. $86^0 19' 38'',75$. **15.** $348^0 21' 51'',6$. **16.** $516^0 49' 45'',7$.

Опредѣлить величины угловъ въ градусахъ минутахъ и секундахъ, когда даны ихъ круговыя мѣры (17—32):

17. 0,2149664. **18.** 2,5483261. **19.** 0,0000044. **20.** 0,0006207.

21. 0,01685. **22.** 0,0288. **23.** 0,104976. **24.** 1,24568.

25. 1,9865437. **26.** 2,48. **27.** 2,7. **28.** 3,016.

29. 3,540687. **30.** 4,0001. **31.** 5. **32.** 9,6.

Задачи на I отдѣлъ.

1. Найти тригонометрическія величины для угловъ: -90^0, -180^0, -270^0 и -360^0.

Найти (2—29):

2. $\sin 450^0$. **3.** $\cos 900^0$. **4.** $\mathrm{tg}\, 3150^0$. **5.** $\sec 1980^0$.

6. $\mathrm{sinvers}\, 810^0$. **7.** $\mathrm{cosinvers}\, 2430^0$. **8.** $\sin(-540^0)$.

9. $\cos(-420^0)$. **10.** $\mathrm{tg}(-390^0)$. **11.** $\mathrm{ctg}(-765^0)$.

12. $\sec(-750^0)$. **13.** $\mathrm{cosec}(-990^0)$.

14. $a \sin 90^0 + b \cos 0^0 - (a+b)\,\mathrm{ctg}\, 270^0$.

15. $5\cos 180^0 - 12\sin 270^0 - \operatorname{tg} 360^0$.

16. $10\sin(-90^0) + 4\sec(-180^0) + 5\operatorname{cosec} 270^0$.

17. $(8 + \cos 270^0)(4 - \sin 180^0)$.

18. $32 : [\cos(-180^0) - 5\sin(-270^0)]$.

19. $a^2 - 2ab\sin 270^0 + b^2\cos^2 360$.

20. $n\operatorname{tg} 180^0 + m\cos(-180^0) + (m-n)\sin 450^0$.

21. $1{,}6\sec 180^0 - 4\operatorname{cosec} 90^0 + \sin 540^0 + 1$.

22. $\frac{35}{\operatorname{tg} 90^0}$. **23.** $\frac{10}{\operatorname{ctg} 270^0}$. **24.** $\frac{7 - 6\operatorname{tg}(-180^0)}{4\operatorname{ctg} 360^0 + \cos 270^0}$.

25. $(m^2 - n^2)\operatorname{ctg} 90^0 + \frac{2nm}{\cos 180^0} - \frac{m^2 + n^2}{\sin 270^0}$.

26. $a^2\sin 5\alpha + b^2\cos 2\alpha - \frac{2ab}{\operatorname{tg} 3\alpha}$ при $\alpha = 90^0$.

27. $4\operatorname{ctg}^2 45^0 + \cos 60^0 + 2{,}5$. **28.** $\sec 45^0 . \operatorname{cosec} 30^0 . \operatorname{tg} 60^0$.

29. $2\sin(-45^0) - \sqrt{6}\operatorname{tg}(-60^0)$.

30. Построить меньшій изъ угловъ, когда: a) $\sin\alpha = -0{,}8$; b) $\cos\alpha = {}^5/_9$; c) $\cos\alpha = -0{,}25$; d) $\operatorname{tg}\alpha = 3$; e) $\operatorname{ctg}\alpha = -4$; f) $\sec\alpha = -1^1/_3$ и g) $\operatorname{cosec}\alpha = -1{,}4$.

31. Построить: a) $k\sin\alpha$; b) $k\cos\alpha$; c) $k\operatorname{tg}\alpha$; d) $k\operatorname{ctg}\alpha$; e) $k\sec\alpha$ и f) $k\operatorname{cosec}\alpha$, гдѣ k данная длина, а α данный острый уголъ.

32. Пусть α данный острый уголъ; найти построеніемъ уголъ x, когда: a) $\cos x = {}^1/_4 \sin\alpha$; b) $\sin x = 0{,}2\cos\alpha$; c) $\operatorname{tg} x = 3\cos\alpha$; d) $\operatorname{ctg} x = 4\operatorname{tg}\alpha$ и e) $\operatorname{ctg} x = {}^2/_3 \sec\alpha$.

Въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC, гдѣ уголъ C прямой, означимъ стороны, противолежащія угламъ A, B и C, буквами a, b и c; слѣд. a и b будутъ катеты, а c гипотенуза этого треугольника. Рѣшить слѣд. задачи:

33. Дано: $a = 0{,}3$ и $b = 0{,}4$. Найти $\sin A$.

34. » $b = 1$ и $c = 3$. Найти $\cos B$.

35. » $a = 1$ и $c = 1^2/_3$. Найти $\operatorname{tg} A$.

36. » $a = 6$ и $c = 10$. Найти $\operatorname{ctg} A$.

37. » $\sin A = 0{,}7$ и $a = 14$. Найти b и c.

38. » $\sin A = 0{,}25$ и $c = 40$. Найти a и b.

39. » $\cos A = \sqrt{0{,}4}$ и $a = 6$. Найти b и c.

40. » $\cos B = {}^8/_9$ и $a = 24$. Найти b и c.

41. » $\operatorname{tg} A = 6$ и $a = 12$. Найти b и c.

42. » $\operatorname{tg} B = 1{,}5$ и $a = 0{,}8$. Найти b и c.

43. Дано: $\operatorname{ctg} A = 2$ и $b = 4$. Найти a и c.
44. » $\operatorname{ctg} B = {}^3/_4$ и $c = 15$. Найти a и b.
45. » $\sec A = \sqrt{5}$ и $b = 9$. Найти a и c.
46. » $\operatorname{cosec} B = 1{,}25$ и $a = 0{,}6$. Найти b и c.

Найти тригонометрическія величины для угла α, когда (47—51):
47. $\sin\alpha = 0{,}8$. **48.** $\cos\alpha = {}^1/_3$. **49.** $\operatorname{tg}\alpha = 1{,}25$.
50. $\sec\alpha = \sqrt{3}$. **51.** $\operatorname{cosec}\alpha = 4$.

Найти тригонометрическія величины для угла α, когда дана одна изъ его тригонометрическихъ величинъ (52—75):

52.	$\sin\alpha = 0{,}4$,	гдѣ	$\angle\alpha$	принадлежитъ	1-ой	четверти.
53.	$\sin\alpha = {}^5/_6$	»	»	»	2-ой	»
54.	$\sin\alpha = -0{,}5$	»	»	»	3-ей	»
55.	$\sin\alpha = -\sqrt{0{,}2}$	»	»	»	4-ой	»
56.	$\cos\alpha = {}^1/_6$	»	»	»	1-ой	»
57.	$\cos\alpha = -\sqrt{{}^3/_7}$	»	»	»	2-ой	»
58.	$\cos\alpha = -0{,}6$	»	»	»	3-ей	»
59.	$\cos\alpha = 0{,}9$	»	»	»	4-ой	»
60.	$\operatorname{tg}\alpha = 2$	»	»	»	1-ой	»
61.	$\operatorname{tg}\alpha = -7$	»	»	»	2-ой	»
62.	$\operatorname{tg}\alpha = 1\,{}^1/_3$	»	»	»	3-ей	»
63.	$\operatorname{tg}\alpha = -0{,}75$	»	»	»	4-ой	»
64.	$\operatorname{ctg}\alpha = {}^1/_3$	»	»	»	1-ой	»
65.	$\operatorname{ctg}\alpha = -\sqrt{3}$	»	»	»	2-ой	»
66.	$\operatorname{ctg}\alpha = 1{,}6$	»	»	»	3-ей	»
67.	$\operatorname{ctg}\alpha = -0{,}5$	»	»	»	4-ой	»
68.	$\sec\alpha = 3$	»	»	»	1-ой	»
69.	$\sec\alpha = -5$	»	»	»	2-ой	»
70.	$\sec\alpha = -1{,}4$	»	»	»	3-ей	»
71.	$\sec\alpha = 1\,{}^2/_3$	»	»	»	4-ой	»
72.	$\operatorname{cosec}\alpha = 1\,{}^1/_3$	»	»	»	1-ой	»
73.	$\operatorname{cosec}\alpha = 2{,}5$	»	»	»	2-ой	»
74.	$\operatorname{cosec}\alpha = -8$	»	»	»	3-ей	»
75.	$\operatorname{cosec}\alpha = -3$	»	»	»	4-ой	»

76. Данъ $\sin\alpha = 0{,}3$, гдѣ уголъ α принадлежитъ второй четверти; найти тригонометрическія величины для угла $-\alpha$.

77. Данъ $\cos\alpha = -\sqrt{{}^1/_3}$, гдѣ уголъ α принадлежитъ третьей четверти; найти тригон. величины для угла $-\alpha$.

78. Данъ $\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{8}$, гдѣ $270^\circ < \alpha < 360^\circ$; найти тригоном. величины для угла $-\alpha$.

79. Данъ $\operatorname{ctg}(-\alpha) = 2$, гдѣ $90^\circ < \alpha < 180^\circ$; найти $\operatorname{cosec}(-\alpha)$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$.

80. Данъ $\sec\alpha = -3$, гдѣ уголъ α принадлежитъ третьей четверти; найти $\operatorname{tg}(-\alpha)$ и $\sin(-\alpha)$.

81. Данъ $\operatorname{cosec}\alpha = 4$, гдѣ $90^\circ < \alpha < 180^\circ$; найти $\sec(-\alpha)$, $\operatorname{ctg}(-\alpha)$ и $\sin(-\alpha)$.

82. Найти величину $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha$, когда $\sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и уголъ α принадлежитъ второй четверти.

83. Найти величину $\sin\alpha.\cos\alpha$, когда $\operatorname{ctg}\alpha = 3$ и уголъ α принадлежитъ третьей четверти.

84. Найти величину: $\frac{\sec\alpha - \cos\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}$, когда $\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{\frac{m}{n}}$ и уголъ α принадлежитъ четвертой четверти.

Показать (85—104):

85. $\sin^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha - \cos^2\alpha$.

86. $\sin^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha = \operatorname{cosec}^2\alpha - \cos^2\alpha$.

87. $\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\alpha = \sec^2\alpha - \operatorname{cosec}^2\alpha$. **88.** $\sec\alpha - \cos\alpha = \sin\alpha.\operatorname{tg}\alpha$.

89. $\frac{\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} . \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\operatorname{cosec}\alpha}{\sec\alpha}$. **90.** $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin^3\alpha}{\cos\alpha - \cos^3\alpha}$.

91. $\frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sec\alpha + \operatorname{cosec}\alpha} = \sin\alpha . \cos\alpha$. **92.** $\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta} = \operatorname{tg}\alpha . \operatorname{tg}\beta$.

93. $\frac{\cos\alpha + \sec\alpha}{\cos\alpha - \sec\alpha} = -\operatorname{ctg}^2\alpha - \operatorname{cosec}^2\alpha$.

94. $(\sec^2\alpha - 1)(\operatorname{cosec}^2\alpha - 1) = 1$. **95.** $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = \sec\alpha . \operatorname{cosec}\alpha$.

96. $\sec^2\alpha . \operatorname{cosec}^2\alpha = \sec^2\alpha + \operatorname{cosec}^2\alpha$.

97. $\operatorname{ctg}^2\alpha . \cos^2\alpha = \operatorname{ctg}^2\alpha - \cos^2\alpha$.

98. $\sin\alpha = \pm\sqrt{(\sec^2\alpha - 1) : (1 + \operatorname{tg}^2\alpha)}$.

99. $\cos\alpha = \pm\sqrt{(\operatorname{cosec}^2\alpha - 1) : (1 + \operatorname{ctg}^2\alpha)}$.

100. $\sin^2\alpha . \cos^2\beta - \cos^2\alpha . \sin^2\beta = \sin^2\alpha - \sin^2\beta$.

101. $\cos^2\alpha . \cos^2\beta - \sin^2\alpha . \sin^2\beta = \cos^2\alpha - \sin^2\beta$.

102. $\operatorname{ctg}\alpha + \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} = \operatorname{cosec}\alpha$.

103. $\sin\alpha(1 + \operatorname{tg}\alpha) + \cos\alpha(1 + \operatorname{ctg}\alpha) = \sec\alpha + \operatorname{cosec}\alpha$.

104. $(\operatorname{cosec}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha)^2 = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$.

Рѣшить уравненія (105 — 121):

105. $a\sin x = b\operatorname{cosec} x$. **106.** $\operatorname{tg} x : \operatorname{ctg} x = b$.

107. $\sin x \,.\, \sec x = a\operatorname{ctg} x$.

108. $a(\sin x + \operatorname{tg} x) = b(1+\cos x)$.

109. $a(\sin x + \operatorname{tg} x) = b(\operatorname{tg} x - \sin x)$.

110. $a(\operatorname{tg} x - \sin x) : (\operatorname{tg} x + \sin x) = b(1-\cos x)$.

111. $\operatorname{tg} x \pm \sec x = a$. **112.** $\operatorname{tg} x + 5\operatorname{ctg} x = 6$.

113. $a\sin x = b\cos^2 x$. **114.** $a\sin x = b : \operatorname{tg} x$.

115. $\sin x\cos x = \sqrt{\frac{2}{9}}$. **116.** $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$.

117. $a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}$.

118. $\cos^2 x - \sin^2 x + \operatorname{tg}^2 x = \frac{17}{20}$.

119. $\sin x = a\sin y$, $\operatorname{tg} x = b\operatorname{tg} y$. **120.** $\operatorname{tg} x = \sin y$, $\sin x = 2\operatorname{ctg} y$.

121. $2\operatorname{ctg} x + 4\operatorname{ctg} y = 1$, $9\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 4$.

122. Если $m = \operatorname{tg}\alpha + \sin\alpha$ и $n = \operatorname{tg}\alpha - \sin\alpha$, то $\cos\alpha = \frac{m-n}{m+n}$.

123. Если $\cos x = \frac{\cos A}{\cos C}$ и $\cos(90^0 - x) = \frac{\cos B}{\sin C}$,
то $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1$.

124. Если $\left(\frac{\sin A}{\sin B}\right)^2 + (\cos A\cos C)^2 = 1$, то $\sin C = \pm\frac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} B}$.

Найти истинныя величины выраженій (125 — 130):

125. $\frac{1+\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$ при $\alpha = 180^0$. **126.** $\frac{\sin^2\alpha}{1-\cos\alpha}$ при $\alpha = 0^0$.

127. $\frac{\cos^2\alpha}{1-\sin\alpha}$ при $\alpha = 90^0$. **128.** $\frac{1+\sec\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha}$ при $\alpha = 180^0$.

129. $\frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha}$ при $\alpha = 45^0$. **130.** $\frac{1-\cos\alpha}{1-\sec\alpha}$ при $\alpha = 0^0$.

Задачи на II отдѣлъ.

1. Выразить по sin остраго угла:
a) $\sin 160^0$; b) $\sin 232^0 17'$; c) $\sin 317^0 29''$; d) $\sin 593^0$;
e) $\cos 144^0$; f) $\cos 198^0 26'$; g) $\cos 288^0 6' 18''$ и h) $\cos 1000^0$.

2. Выразить по cos остраго угла:
a) $\sin 96^0 47' 35''$; b) $\sin 203^0$; c) $\sin 342^0 56'$; d) $\sin 1180^0$;
e) $\cos 165^0 24''$; f) $\cos 218^0$; g) $\cos 309^0$ и h) $\cos 487^0$.

3. Выразить по tg остраго угла:
a) $\operatorname{tg} 100^0 42'$; b) $\operatorname{tg} 182^0 5'$; c) $\operatorname{tg} 308^0$; d) $\operatorname{tg} 676^0$;
e) $\operatorname{ctg} 125^0 25''$; f) $\operatorname{ctg} 247^0 8''$; g) $\operatorname{ctg} 275^0$ и h) $\operatorname{ctg} 845^0$.

4. Выразить по ctg остраго угла:
a) $\operatorname{tg} 92^0 25' 46''$; b) $\operatorname{tg} 194^0 26'$; c) $\operatorname{tg} 348^0$; d) $\operatorname{tg} 475^0$;
e) $\operatorname{ctg} 172^0 11' 24''$; f) $\operatorname{ctg} 200^0$; g) $\operatorname{ctg} 358^0$ и h) $\operatorname{ctg} 1600^0$.

5. Выразить по sec остраго угла:
a) $\sec 204^0 19''$; b) $\sec 310^0$; c) $\operatorname{cosec} 152^0$ и d) $\operatorname{cosec} 485^0 30'$.

6. Выразить по cosec остраго угла:
a) $\sec 142^0 24'$; b) $\sec 588^0$; c) $\operatorname{cosec} 262^0$ и d) $\operatorname{cosec} 320^0$.

7. Дано: $\sin\alpha = 0{,}8$ *). Найти:
$\sin(270^0-\alpha)$; $\cos(\alpha-90^0)$; $\operatorname{tg}(540^0-\alpha)$; $\operatorname{ctg}(270^0+\alpha)$; $\sec(180^0-\alpha)$; $\operatorname{cosec}(180^0+\alpha)$.

8. Дано: $\sin(90^0+\alpha) = {}^1/_3$. Найти:
$\sin(360^0-\alpha)$; $\cos(\alpha-180^0)$; $\operatorname{tg}(\alpha-90^0)$; $\operatorname{ctg}(180^0-\alpha)$; $\sec(\alpha-270^0)$; $\operatorname{cosec}(270^0+\alpha)$.

9. Дано: $\sin(180^0+\alpha) = -\sqrt{{}^5/_9}$. Найти:
$\sin(\alpha-90^0)$; $\cos(-\alpha-270^0)$; $\operatorname{tg}(\alpha-180^0)$; $\operatorname{ctg}(270^0-\alpha)$; $\sec(\alpha-360^0)$; $\operatorname{cosec}(\alpha+90^0)$.

10. Дано: $\sin(360^0-\alpha) = -0{,}4$. Найти:
$\sin(\alpha-270^0)$; $\cos(-\alpha-360^0)$; $\operatorname{tg}(180^0+\alpha)$; $\operatorname{ctg}(\alpha-90^0)$; $\sec(-\alpha-90^0)$; $\operatorname{cosec}(180^0-\alpha)$.

11. Дано: $\cos\alpha = {}^4/_5$. Найти:
$\sin(\alpha+180^0)$; $\cos(-\alpha+180^0)$; $\operatorname{tg}(270^0-\alpha)$; $\operatorname{ctg}(\alpha-270^0)$; $\sec(360^0-\alpha)$; $\operatorname{cosec}(\alpha+270^0)$.

12. Дано: $\cos(\alpha-90^0) = {}^1/_9$. Найти:
$\sin(360^0-\alpha)$; $\cos(\alpha-180^0)$; $\operatorname{tg}(\alpha-270^0)$; $\operatorname{ctg}(\alpha+90^0)$; $\sec(270^0+\alpha)$; $\operatorname{cosec}(\alpha-360^0)$.

13. Дано: $\cos(180^0-\alpha) = -\sqrt{0{,}75}$. Найти:
$\sin(90^0+\alpha)$; $\cos(\alpha-270^0)$; $\operatorname{tg}(\alpha-360^0)$; $\operatorname{ctg}(180^0-\alpha)$; $\sec(\alpha-90^0)$; $\operatorname{cosec}(270^0-\alpha)$.

14. Дано: $\cos(\alpha-270^0) = -0{,}4$. Найти:
$\sin(270^0+\alpha)$; $\cos(-\alpha-90^0)$; $\operatorname{tg}(360^0-\alpha)$; $\operatorname{ctg}(180^0+\alpha)$; $\sec(\alpha-90^0)$; $\operatorname{cosec}(-\alpha-270^0)$.

15. Дано: $\operatorname{tg}\alpha = 3$. Найти:
$\sin(180^0-\alpha)$; $\cos(270^0+\alpha)$; $\operatorname{tg}(90^0+\alpha)$; $\operatorname{ctg}(-\alpha-360^0)$; $\sec(\alpha-270^0)$; $\operatorname{cosec}(-\alpha-90^0)$.

*) Въ задачахъ отъ 7—24 считаемъ $\angle\alpha$ острымъ.

16. Дано: $\mathrm{tg}(180^0-\alpha)=-\sqrt{8}$. Найти:
$\sin(-\alpha-90^0)$; $\cos(\alpha+180^0)$; $\mathrm{tg}(\alpha-270^0)$; $\mathrm{ctg}(-\alpha-270^0)$; $\sec(90^0-\alpha)$; $\mathrm{cosec}(270^0+\alpha)$.

17. Дано: $\mathrm{tg}(270^0+\alpha)=-0{,}5$. Найти:
$\sin(90^0-\alpha)$; $\cos(360^0-\alpha)$; $\mathrm{tg}(-\alpha-90^0)$; $\mathrm{ctg}(\alpha+90^0)$; $\sec(-\alpha-180^0)$; $\mathrm{cosec}(\alpha-270^0)$.

18. Дано: $\mathrm{tg}(\alpha-360^0)={}^2/_3$. Найти:
$\sin(\alpha-180^0)$; $\cos(\alpha-450^0)$; $\mathrm{tg}(-\alpha-180^0)$; $\mathrm{ctg}(270^0-\alpha)$; $\sec(\alpha+270^0)$; $\mathrm{cosec}(-\alpha-360^0)$.

19. Дано: $\mathrm{ctg}\,\alpha=1{}^1/_3$. Найти:
$\sin(-\alpha-270^0)$; $\cos(\alpha+180^0)$; $\mathrm{tg}(270^0-\alpha)$; $\mathrm{ctg}(360^0-\alpha)$; $\sec(\alpha+90^0)$; $\mathrm{cosec}(-180^0-\alpha)$.

20. Дано: $\mathrm{ctg}(\alpha-90^0)=-5$. Найти:
$\sin(540^0+\alpha)$; $\cos(180^0-\alpha)$; $\mathrm{tg}(\alpha-270^0)$; $\mathrm{ctg}(-\alpha-90^0)$; $\sec(270^0+\alpha)$; $\mathrm{cosec}(90^0-\alpha)$.

21. Дано: $\mathrm{ctg}(180^0+\alpha)=\sqrt{24}$. Найти:
$\sin(-\alpha-180^0)$; $\cos(90^0-\alpha)$; $\mathrm{tg}(900^0-\alpha)$; $\mathrm{ctg}(\alpha-90^0)$; $\sec(-\alpha-270^0)$; $\mathrm{cosec}(270^0-\alpha)$.

22. Дано: $\mathrm{ctg}(270^0-\alpha)=0{,}8$. Найти:
$\sin(\alpha+180^0)$; $\cos(450^0-\alpha)$; $\mathrm{tg}(180^0-\alpha)$; $\mathrm{ctg}(\alpha-90^0)$; $\sec(-\alpha-360^0)$; $\mathrm{cosec}(270^0+\alpha)$.

23. Дано: $\sec(180^0+\alpha)=-\sqrt{3}$. Найти:
$\sin(360^0-\alpha)$; $\cos(\alpha+720^0)$; $\mathrm{tg}(-270^0-\alpha)$; $\mathrm{ctg}(\alpha-180^0)$; $\sec(\alpha-90^0)$; $\mathrm{cosec}(\alpha-270^0)$.

24. Дано: $\mathrm{cosec}(270^0-\alpha)=-1{,}25$. Найти:
$\sin(-\alpha-810^0)$; $\cos(\alpha-180^0)$; $\mathrm{tg}(90^0-\alpha)$; $\mathrm{ctg}(-\alpha-180^0)$; $\sec(360^0-\alpha)$; $\mathrm{cosec}(\alpha+270^0)$.

Найти (25 — 55):

25. $\cos 225^0$. **26.** $\sin 480^0$. **27.** $\mathrm{tg}\,330^0$.
28. $\mathrm{ctg}\,855^0$. **29.** $\mathrm{ctg}\,300^0$. **30.** $\sin 660^0$.
31. $\sec 210^0$. **32.** $\mathrm{cosec}\,240^0$. **33.** $\mathrm{vers}\,315^0$.
34. $\sin\frac{4}{3}\pi$. **35.** $\cos\frac{10}{3}\pi$. **36.** $\mathrm{ctg}\frac{5}{4}\pi$.
37. $\sin -150^0$. **38.** $\mathrm{ctg} -225^0$. **39.** $\mathrm{tg} -\frac{11}{3}\pi$.
40. $\sec -\frac{5}{6}\pi$. **41.** $\mathrm{covers} -\frac{2}{3}\pi$. **42.** $\cos -960^0$.

43. $\sin(180^0 - x) + 2\cos 3x$ при $x = 315^0$.

44. $4\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 4x + 2\operatorname{tg} 5x$ при $x = 300^0$.

45. $2\sin(x - 90^0) + \cos(x - 180^0) - \sin(x - 360^0)$ при $x = 45^0$.

46. $3\sin 7x + \cos(-180^0 - 5x)$ при $x = 135^0$.

47. $\sin x + \cos x + \operatorname{tg} x - \sec x$ при $x = n\pi$.

48. $4\cos(2x - 270^0) - 3\operatorname{tg}(-x + 60^0)$ при $x = -\frac{4}{3}\pi$.

49. $[\operatorname{ctg} 90^0 + 3x) + \sec(x - 255^0)]^{-2}$ при $x = \frac{3}{4}\pi$.

50. $\sin x + \cos 4x + \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} 4{,}5x$ при $x = 60^0$.

51. $\dfrac{\operatorname{tg} 3x - 5\operatorname{ctg}(x + 270^0)}{8\sin(75^0 + x)}$ при $x = 225^0$.

52. $\sin(180^0 + x)\cos(360^0 - x)\operatorname{ctg}(270^0 - x)$ при $\operatorname{ctg} x = 0{,}2$.

53. $\dfrac{\sin(90^0 + x)\operatorname{ctg}(180^0 - x)}{\cos(270^0 + x)}$ при $\cos x = \sqrt{\dfrac{1}{3}}$.

54. $\sin\left[(4n + 1)\dfrac{\pi}{2} \pm x\right]$, гдѣ n цѣлое число и $\cos x = 0{,}48$.

55. $\operatorname{tg}\left[(4n + 3)\dfrac{\pi}{2} \pm x\right]$, гдѣ n цѣлое число и $\operatorname{tg} x = 2{,}25$.

Найти всѣ величины выраженій (56 — 61), гдѣ n цѣлое число:

56. $\sin\dfrac{n\pi}{4}$. **57.** $\cos\dfrac{3n\pi}{2}$. **58.** $\sin\left[\dfrac{n\pi}{2} + \left(-1\right)^n\dfrac{\pi}{6}\right]$.

59. $\operatorname{tg}\dfrac{n - 2}{3}\pi$. **60.** $\operatorname{ctg}\dfrac{2n + 1}{3}\,.\,180^0$. **61.** $\sec\dfrac{3n + 2}{4}\pi$.

Упростить (62—66):

62. $\dfrac{n\sin\alpha\operatorname{tg}(180^0 + \alpha)}{\operatorname{tg}\alpha\cos(90^0 - \alpha)}$. **63.** $\dfrac{\operatorname{tg}(90^0 + \alpha)\cos(270^0 - \alpha)\cos(-\alpha)}{\operatorname{ctg}(180^0 + \alpha)\sin(270^0 + \alpha)}$.

64. $\dfrac{\operatorname{tg}(180^0 + \alpha)\sin(90^0 + \alpha)\operatorname{ctg}\alpha}{\sin(90^0 - \alpha)\operatorname{ctg}(270^0 + \alpha)\operatorname{tg}(180^0 - \alpha)}$.

65. $\dfrac{\sin(90^0 + \alpha)\cos(90^0 - \alpha)}{\cos(180^0 + \alpha)} + \dfrac{\sin(180^0 - \alpha)\cos(450^0 + \alpha)}{\sin(180^0 + \alpha)}$.

66. $\dfrac{\sin(270^0 - \alpha)\operatorname{tg}(180^0 - \beta)}{\operatorname{tg}(180^0 + \beta)\cos(180^0 - \alpha)} + \dfrac{\operatorname{ctg}(90^0 - \alpha)\sin(\gamma - 90^0)}{\cos(180^0 - \gamma)\operatorname{tg}(-\alpha)}$.

67. Найти наименьшее положительное значеніе для x, когда

a) $\sin x = -\sin 3^0 24'$; b) $\sin x = -\cos 48^0 26' 47''$;

c) $\cos x = -\cos 20^0$; d) $\cos x = -\sin 75^0 15'$;

e) $\operatorname{tg} x = -\operatorname{tg} 72^0 18' 35''$; f) $\operatorname{tg} x = -\operatorname{ctg} 15^0 44'$;

g) $\operatorname{ctg} x = -\operatorname{ctg} 56^0$; h) $\operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg} 30^0 6'$.

68. Найти величины для x, въ промежуткѣ отъ 0^0 до 1000^0, удовлетворяющихъ уравненію: $\operatorname{tg} x = 1$.

69. Найти величины для x, въ промежуткѣ отъ 200^0 до 800^0, удовлетворяющихъ уравненію: $\cos x = {}^1/_2$.

70. Найти величины для x, въ промежуткѣ отъ 0^0 до -420^0, удовлетворяющихъ уравненію: $\sin x = \sqrt{{}^1/_2}$.

71. Найти величины для x, въ промежуткѣ отъ -180^0 до -720^0, удовлетворяющихъ уравненію: $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$.

Найти (72—86) общее выраженіе для x, когда:

72. $\sin x = 1$. **73.** $\cos x = 1$. **74.** $\operatorname{tg} x = -1$.
75. $\cos x = \sqrt{3}$. **76.** $\cos x = -{}^1/_2$. **77.** $\operatorname{tg}^2 x = {}^1/_3$.
78. $\operatorname{ctg}^2 x = 1$. **79.** $\sec^2 x = 2$. **80.** $\operatorname{cosec}^2 x = {}^4/_3$.
81. $\sin x = -\cos x$. **82.** $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x$. **83.** $\sin^2 x = \sin^2 \alpha$.
84. $\cos^2 x = \cos^2 \alpha$. **85.** $\cos^2 x = \sin^2 \alpha$. **86.** $\operatorname{tg}^2 x = \operatorname{tg}^2 \alpha$.

Найти общее выраженіе для x, удовлетворяющее одновременно уравненіямъ (87—90):

87. $\cos x = \sqrt{{}^1/_2}$ и $\sin x = -\sqrt{{}^1/_2}$.

88. $\sin x = -{}^1/_2$ и $\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

89. $\operatorname{tg} x = 1$ и $\operatorname{ctg} x = -1$.

90. $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$ и $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{{}^1/_3}$.

Рѣшить уравненія (91 — 101):

91. $\sin 2x = \cos x$. **92.** $\sin 2x = \sin x$.
93. $\sin 4x + \sin x = 0$. **94.** $2 \sin x = \operatorname{tg} x$.
95. $\operatorname{ctg} x = 2 \cos x$. **96.** $\sec x \,.\, \operatorname{ctg} x = 2\sqrt{3}$.
97. $3 \sin x = 2 \cos^2 x$. **98.** $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$.

99. $\sin (x - y) = {}^1/_2$ и $\cos (x + y) = {}^1/_2$.

100. $\dfrac{\sin x}{\sin y} = \sqrt{2}$ и $\dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y} = \sqrt{3}$. **101.** $6 \operatorname{ctg}^2 x - 4 \cos^2 x = 1$.

102. Показать, что всѣ углы, имѣющіе тотъ же синусъ и тотъ же косинусъ, какіе имѣетъ уголъ α, заключаются въ формулѣ: $2n\pi + \alpha$, гдѣ n цѣлое число.

103. Показать, что всѣ углы, имѣющіе съ угломъ α одинаковый синусъ, заключаются въ формулѣ: $(2n + 1)\pi \pm \left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)$.

104. Показать, что всѣ углы, имѣющіе съ угломъ α одинаковый косинусъ, заключаются въ формулѣ: $\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi+(-1)^n\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$.

Задачи на III отдѣлъ.

1. Найти $\sin(\alpha-30^0)$, когда $\cos\alpha=0{,}6$ *).

2. Найти $\cos(60^0-\alpha)$, когда $\sin\alpha=\sqrt{0{,}2}$.

3. Найти $\operatorname{tg}(45^0-\alpha)$, когда $\operatorname{tg}\alpha=3$.

4. Найти $\cos(45^0+\alpha)$, когда $\operatorname{tg}\alpha=5$.

5. Найти $\operatorname{tg}(135^0+\alpha)$, когда $\sin\alpha={}^2/_3$.

6. Найти $\operatorname{ctg}(\alpha-240^0)$, когда $\cos\alpha=0{,}4$.

7. Дано: $\sin\alpha=0{,}6$ и $\sin\beta=0{,}5$. Найти тригонометрическія величины для угловъ $\alpha+\beta$ и $\alpha-\beta$.

8. Дано: $\sin\alpha={}^1/_3$ и $\cos\beta={}^2/_3$. Найти тригонометрическія величины для угловъ $\alpha+\beta$ и $\alpha-\beta$.

9. Дано: $\cos\alpha=\sqrt{0{,}6}$ и $\cos\beta=\sqrt{0{,}2}$. Найти тригонометрическія величины для угловъ $\alpha+\beta$ и $\alpha-\beta$.

10. Дано: $\operatorname{tg}\alpha=3$ и $\operatorname{tg}\beta=2$. Найти тригонометрическія величины для угловъ $\alpha+\beta$ и $\alpha-\beta$.

11. Дано: $\cos\alpha=0{,}3$ и $\sin\beta=-0{,}4$, гдѣ $\angle\alpha$ принадлежитъ четвертой, а $\angle\beta$ — третьей четверти; найти: $\sin(\alpha-\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$, $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ и $\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)$.

12. Дано: $\sin\alpha={}^2/_3$ и $\cos\beta=-{}^3/_4$, гдѣ $\angle\alpha$ принадлежитъ второй четверти, а $\angle\beta$ — третьей; найти: $\sin(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha-\beta)$, $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$ и $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)$.

13. Дано: $\operatorname{tg}\alpha={}^1/_3$ и $\operatorname{tg}\beta=-2$, гдѣ $\angle\alpha$ принадлежитъ третьей четверти, а $\angle\beta$ — четвертой. Найти: $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$, $\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)$, $\sin(\alpha-\beta)$ и $\sec(\alpha+\beta)$.

14. Найти $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$, когда $\sin\alpha=0{,}6$.

15. Найти $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$, когда $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}$.

16. Найти $\operatorname{tg}2\alpha$, когда $\operatorname{tg}\alpha=2-\sqrt{3}$.

17. Найти $\operatorname{ctg}2\alpha$, когда $\operatorname{ctg}\alpha=8$.

18. Найти $\sin 3\alpha$, когда $\sin\alpha=\sqrt{{}^1/_3}$.

19. Найти $\cos 3\alpha$, когда $\cos\alpha=-0{,}2$.

---

*) Въ задачахъ отъ 1 до 10 вкл. считаемъ $\angle\angle\alpha$ и β острыми.

20. Найти $\operatorname{tg} 3\alpha$ и $\operatorname{ctg} 4\alpha$, когда $\operatorname{tg}\alpha = 5$.

21. Данъ $\sin\alpha = 0{,}8$, гдѣ $\angle\alpha$ принадлежитъ второй четверти. Найти: $\sin 2\alpha$, $\cos 3\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$, $\operatorname{ctg} 3\alpha$ и $\sin 4\alpha$.

22. Данъ $\cos\alpha = \sqrt{1/_3}$, гдѣ $\angle\alpha$ принадлежитъ четвертой четверти. Найти: $\cos 2\alpha$, $\sin 3\alpha$, $\operatorname{tg} 3\alpha$, $\operatorname{ctg} 2\alpha$ и $\cos 4\alpha$.

23. Данъ $\operatorname{tg}\alpha = 3$, гдѣ $\angle\alpha$ принадлежитъ третьей четверти. Найти $\sin 2\alpha$, $\cos 3\alpha$, $\operatorname{tg} 4\alpha$, $\operatorname{ctg} 2\alpha$ и $\sec 2\alpha$.

24. Данъ $\operatorname{ctg}\alpha = -\sqrt{8}$, гдѣ $\angle\alpha$ принадлежитъ второй четверти. Найти $\sin 3\alpha$, $\operatorname{tg} 3\alpha$, $\operatorname{ctg} 4\alpha$ и $\sec 2\alpha$.

25. Дано: $\sin\alpha = 0{,}5$ и $\sin\beta = 1/_3$, гдѣ $\angle\angle\alpha$ и β острые. Найти: $\sin(\alpha + 2\beta)$, $\cos(2\alpha - \beta)$ и $\operatorname{tg}(2\alpha + 2\beta)$.

26. Дано: $\operatorname{tg}\alpha = 1/_7$ и $\operatorname{tg}\beta = 1/_2$. Найти меньшую изъ величинъ для угла $\alpha + 2\beta$.

27. Дано: $2\alpha + \beta + 2\gamma = 180^0$ и $\operatorname{ctg}(\alpha + \gamma) = p$. Найти $\operatorname{tg}\beta$.

28. Дано: $\sin(\alpha+\beta)\operatorname{tg}\gamma = \cos(\alpha+\beta)$. Найти величину $\alpha+\beta+\gamma$.

29. Найти $\sin\alpha$, когда $\sin 2\alpha = 4/_9\sqrt{2}$ и $\angle 2\alpha$ принадлежитъ второй четверти.

30. Найти $\cos\alpha$, когда $\cos 2\alpha = -0{,}68$ и $\angle 2\alpha$ принадлежитъ третьей четверти.

31. Найти $\operatorname{tg}\alpha$, $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, когда $\operatorname{tg} 2\alpha = -5/_{12}$ и $\angle 2\alpha$ принадлежитъ третьей четверти.

32. Найти $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, когда $\operatorname{tg} 2\alpha = -24/_7$ и $\angle 2\alpha$ принадлежитъ четвертой четверти.

Показать справедливость слѣдующихъ равенствъ:

33. $\dfrac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha + \sec 2\alpha$. **34.** $\dfrac{4\operatorname{tg}\alpha(1 - \operatorname{tg}^2\alpha)}{(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)^2} = \sin 4\alpha$.

35. $\cos\alpha + \cos(120^0 - \alpha) + \cos(120^0 + \alpha) = 0$.

36. $\cos^2\alpha + \cos^2(60^0 - \alpha) + \cos^2(60^0 + \alpha) = 3/_2$.

37. $\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta$.

38. $\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) = \cos^2\alpha - \sin^2\beta$.

39. $\sin 3\alpha \operatorname{cosec}\alpha - \cos 3\alpha \sec\alpha = 2$.

40. $3\sin\alpha - \sin 3\alpha = 2\sin\alpha(1 - \cos 2\alpha)$.

41. $\sec(45^0 + \alpha)\sec(45^0 - \alpha) = 2\sec 2\alpha$.

42. $\dfrac{\cos\alpha - \cos 3\alpha}{\sin 3\alpha - \sin\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha$. **43.** $\dfrac{\cos 2\alpha - \cos 4\alpha}{\sin 4\alpha - \sin 2\alpha} = \operatorname{tg} 3\alpha$.

44. $\dfrac{\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha} = \operatorname{tg} 3\alpha$.

45. $\dfrac{\sin\alpha + 2\sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\sin 3\alpha + 2\sin 5\alpha + \sin 7\alpha} = \dfrac{\sin 3\alpha}{\sin 5\alpha}$.

46. $\dfrac{\sin\alpha \pm \sin n\alpha + \sin(2n-1)\alpha}{\cos\alpha \pm \cos n\alpha + \cos(2n-1)\alpha} = \operatorname{tg} n\alpha$.

47. $\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \dfrac{\sin(2\alpha+\beta)}{\sin\alpha} - 2\cos(\alpha+\beta)$.

48. $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2(\alpha-45^0)}{1+\operatorname{tg}^2(\alpha+45^0)} = \sin 2\alpha$.

49. $\dfrac{\sin 3\alpha + \cos 3\alpha}{\sin 3\alpha - \cos 3\alpha} = \dfrac{1+2\sin 2\alpha}{1-2\sin 2\alpha}\operatorname{tg}(\alpha-45^0)$.

50. $4\sin\alpha\sin(60^0-\alpha)\sin(60^0+\alpha) = \sin 3\alpha$.

51. $\sin 3(\alpha-15^0) = 4\cos(\alpha-45^0)\cos(\alpha+15^0)\sin(\alpha-15^0)$.

52. $\operatorname{cosec} 2\alpha + \operatorname{ctg} 4\alpha = \operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{cosec} 4\alpha$.

53. $\cos^2(\alpha-\beta) + \cos^2\beta - 2\cos(\alpha-\beta)\cos\alpha\cos\beta = \sin^2\alpha$.

54. $\sin^2(\alpha-\beta) + \sin^2\beta + 2\sin(\alpha-\beta)\sin\beta\cos\alpha = \sin^2\alpha$.

55. $\sin 3\alpha\sin^3\alpha + \cos 3\alpha\cos^3\alpha = \cos^3 2\alpha$.

56. $\cos^3\alpha \,.\, \dfrac{\sin 3\alpha}{3} + \sin^3\alpha \,.\, \dfrac{\cos 3\alpha}{3} = \dfrac{\sin 4\alpha}{4}$.

57. $\cos n\alpha\cos(n+2)\alpha - \cos^2(n+1)\alpha + \sin^2\alpha = 0$.

58. $\sin n\alpha\operatorname{cosec}^2\alpha\sec\alpha - \cos n\alpha\sec^2\alpha\operatorname{cosec}\alpha =$
$= 4\sin(n-1)\alpha\operatorname{cosec}^2 2\alpha$.

59. $\cos 10\alpha + \cos 8\alpha + 3\cos 4\alpha + 3\cos 2\alpha = 8\cos\alpha\cos^3 3\alpha$.

60. $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg} 2\alpha + \operatorname{ctg} 4\alpha = \operatorname{cosec} 4\alpha(2+2\cos 2\alpha + 3\cos 4\alpha)$.

61. $\sin\alpha\sin(\beta-\gamma) + \sin\beta\sin(\gamma-\alpha) + \sin\gamma\sin(\alpha-\beta) = 0$.

62. $\cos\alpha\sin(\beta-\gamma) + \cos\beta\sin(\gamma-\alpha) + \cos\gamma\sin(\alpha-\beta) = 0$.

63. $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma - \sin(\alpha+\beta+\gamma) =$
$= 4\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha+\gamma}{2}\sin\dfrac{\beta+\gamma}{2}$.

Показать, что

64. $\sin(\alpha-\beta) + \sin(\beta-\gamma) + \sin(\gamma-\alpha) +$
$+ 4\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\sin\dfrac{\beta-\gamma}{2}\sin\dfrac{\gamma-\alpha}{2} = 0$.

65. $\sin(\alpha+\beta)\cos\beta - \sin(\alpha+\gamma)\cos\gamma = \sin(\beta-\gamma)\cos(\alpha+\beta+\gamma)$.

66. $\cos(\alpha+\beta+\gamma) + \cos(\alpha+\beta-\gamma) + \cos(\alpha+\gamma-\beta) +$
$+ \cos(\beta+\gamma-\alpha) = 4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$.

67. $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = 4\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\gamma)\cos(\beta+\gamma) +$
$- \cos 2(\alpha+\beta+\gamma)$.

68. $\cos(\alpha+\beta)\sin\beta-\cos(\alpha+\gamma)\sin\gamma=\sin(\alpha+\beta)\cos\beta+$
$-\sin(\alpha+\gamma)\cos\gamma$.

69. $\sin(\alpha+\beta+\gamma)\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma)-\sin\alpha\sin\gamma$.

70. $\sin(\delta-\beta)\sin(\alpha-\gamma)+\sin(\beta-\gamma)\sin(\alpha-\delta)+$
$+\sin(\gamma-\delta)\sin(\alpha-\beta)=0$.

Дано $\alpha+\beta+\gamma=180^0$; показать въ примѣрахъ отъ 71 до 87 включительно, что

71. $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$.

72. $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$.

73. $\sin\alpha-\sin\beta+\sin\gamma=4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$.

74. $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1+4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$.

75. $\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\gamma}{2}=4\cos\frac{\beta+\gamma}{4}\cos\frac{\alpha+\gamma}{4}\cos\frac{\alpha+\beta}{4}$.

76. $\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$.

77. $\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma+4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma+1=0$.

78. $\cos 4\alpha+\cos 4\beta+\cos 4\gamma+1=4\cos 2\alpha\cos 2\beta\cos 2\gamma$.

79. $\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\gamma}{2}=4\cos\frac{\pi-\alpha}{4}\cos\frac{\pi-\beta}{4}\cos\frac{\pi-\gamma}{4}$.

80. $\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\gamma}{2}=4\cos\frac{\pi+\alpha}{4}\cos\frac{\pi-\beta}{4}\cos\frac{\pi+\gamma}{4}$.

81. $\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}-1=4\sin\frac{\pi-\alpha}{4}\sin\frac{\pi-\beta}{4}\sin\frac{\pi-\gamma}{4}$.

82. $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=2$.

83. $\sin^2 2\alpha+\sin^2 2\beta+\sin^2 2\gamma+2\cos 2\alpha\cos 2\beta\cos 2\gamma=2$.

84. $\frac{\sin\alpha+\sin\beta-\sin\gamma}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$.

85. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=1$.

86. $\sin n\alpha+\sin n\beta+\sin n\gamma=4\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\alpha}{2}\cos\frac{n\beta}{2}\cos\frac{n\gamma}{2}$, если n цѣлое и вида: $4m+1$ или $4m+3$.

87. $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}+\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\gamma}+\frac{\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\alpha}+\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\gamma}+\frac{\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\beta}+\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}=\sec\alpha\sec\beta\sec\gamma-2$.

Опредѣлить величину x изъ уравненій:

88. $\sqrt{3}\sin x = \sin 2x$. **89.** $\cos 2x = \cos x - 1$.

90. $\sin 3x = 2\sin x$. **91.** $\operatorname{tg} 2x = 3\operatorname{tg} x$.

92. $\operatorname{tg} x = \operatorname{cosec} 2x$. **93.** $5\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 3x$.

Данныя уравненія (94—104) замѣнить простѣйшими:

94. $\sin(x+a)+\cos(x-a)=b$. **95.** $\sin(45^0+x)\cos(45^0-x)={}^1/_2$.

96. $a(\cos x - \sin x)^2 = b\sin 2x$. **97.** $a\operatorname{ctg} 2x = b(1+\operatorname{tg} x)$.

98. $a(\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x) = b(1-\sin 2x) : \sin 2x$.

99. $a(\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x) = b\cos 2x : (1-\cos 2x)$.

100. $a(\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x)=b\operatorname{ctg} 2x$. **101.** $\sin^2 x - 2\cos^2 x + {}^1/_2\sin 2x = 0$.

102. $\operatorname{cosec} x : (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) = d(\operatorname{ctg} x - 2\operatorname{ctg} 2x)$.

103. $m(1+\operatorname{ctg} x) : (\sin x + \cos x) = n(\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} 2x)$.

104. $2\operatorname{ctg}^3 x = b(1+\operatorname{ctg}^2 x) : (1 - \operatorname{tg} x \,.\, \operatorname{ctg} 2x)$.

Опредѣлить x изъ уравненій:

105. $\cos x - \cos 3x = \sin 2x$. **106.** $\cos x - \cos 2x = \sin 3x$.

107. $\cos x + \cos 7x = \cos 4x$. **108.** $\sin 7x - \sin x = \sin 3x$.

109. $\cos 3x + \cos 2x + \cos x = 0$.

110. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$.

111. $\sin 3x + \sin 2x + \sin x = 0$.

112. $\sin x + \sin 3x = \sin 2x + \sin 4x$.

113. $\sin x - \cos x = 2\sqrt{2}\sin x\cos x$. **114.** $\sin x - \cos x = 4\sin x\cos^2 x$.

115. $2\sin^2 x + \sin^2 2x = 2$. **116.** $\sin^2 2x - \sin^2 x = \sin^2\frac{\pi}{6}$.

117. $\operatorname{tg} 2x = 8\cos^2 x - \operatorname{ctg} x$. **118.** $\sin x\sin 3x = {}^1/_2$.

119. $\cos x\cos 3x = \cos 5x\cos 7x$. **120.** $\sin 5x = 16\sin^5 x$.

121. $4\sin x\sin(x-\alpha) = 2\cos\alpha - 1$.

122. $\sin(x+\alpha)+\cos(x+\alpha) = \sin(x-\alpha)+\cos(x-\alpha)$.

123. $\sin\alpha + \sin(x-\alpha) + \sin(2x+\alpha) = \sin(x+\alpha) + \sin(2x-\alpha)$.

124. $(1-\operatorname{tg} x)(1+\sin 2x) = 1+\operatorname{tg} x$.

125. $2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)(1+\sin x) = 1+\cos 2x$.

126. $\sin 9x + \sin 5x + 2\sin^2 x = 1$.

127. $\operatorname{tg}(\alpha+x)\operatorname{tg}(\alpha-x) = \frac{1-2\cos 2\alpha}{1+2\cos 2\alpha}$.

128. Изъ уравненій: $u=3v$, $\operatorname{tg} u = x+1$, $\operatorname{tg} v = x-1$, найти x.

129. Опредѣлить уголъ, котораго синусъ равенъ половинѣ косинуса искомаго угла.

130. Опредѣлить наименьшую величину для x, удовлетворяющую уравненію: $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\left(\frac{8\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$.

131. Опредѣлить $\operatorname{tg} x$ изъ уравненія: $\sin x=\sin\alpha\sin(\beta+x)$.

132. Опредѣлить $\operatorname{tg} x$ изъ уравненія: $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=2$.

133. Опредѣлить $\sin x$ изъ уравненія: $a\cos x=b\sin(\alpha-x)$.

134. Опредѣлить $\sin x$ и $\sin y$ изъ уравненій:

$$x+y=\alpha \text{ и } \frac{\sin x}{\sin y}=\frac{m}{n}.$$

135. Опредѣлить x изъ уравненія: $\cos\beta\sqrt{a^2-x^2}+a\sin\alpha=x\sin\beta$.

136. Опред. x изъ уравн.: $\cos(x+{}^3/_2)\alpha+\cos(x+{}^1/_2)\alpha=\sin\alpha$.

137. Опредѣлить $\sin x$ изъ уравн.: $a\sin(\alpha-x)=b\cos(\beta+x)$.

138. Опредѣлить $\operatorname{tg} x$ изъ уравненія: $\frac{m}{n}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\cdot\frac{\cos(\beta+x)}{\cos(\alpha-x)}$.

139. Опред. $\operatorname{tg}(\alpha-2x)$ изъ уравн.: $\frac{m\operatorname{tg}(\alpha-x)}{\cos^2 x}=\frac{n\operatorname{tg} x}{\cos^2(\alpha-x)}$.

140. Опредѣлить $\operatorname{tg} x$ изъ уравн.: $\operatorname{tg}(\alpha-x)+\operatorname{tg}(\alpha+x)=a$.

141. Опред. $\operatorname{tg} x$ изъ уравненій: $x+y=\alpha$ и $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=a$.

142. Найти $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{tg} y$ изъ уравненій:

$$\operatorname{tg}(x+y)=a \text{ и } \operatorname{tg}(x-y)=b.$$

143. Найти $\sin x$ и $\sin y$ изъ уравеній:

$$\sin(x+y)=a \text{ и } \sin(x-y)=b.$$

144. Найти $\cos x$ и $\cos y$ изъ уравненій:

$$\cos(x+y)=a \text{ и } \cos(x-y)=b.$$

145. Опредѣлить x изъ уравненія:

$$x^2\cos\alpha\cos\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)+x\cos(\alpha-\beta)=2\cos\frac{\beta}{2}.$$

146. Опредѣлить x изъ уравненія:

$$\operatorname{ctg} 2^{x-1}\alpha-\operatorname{ctg} 2^x\alpha=\operatorname{cosec} 3\alpha.$$

147. Опредѣлить $\cos x$ изъ уравненія:

$$\cos^2(\alpha+x)+\cos^2(\alpha-x)=a.$$

148. Опредѣлить $\cos x$ изъ уравненія:

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg} x=\operatorname{tg}^2(\alpha+x)-\operatorname{tg}^2(\alpha-x).$$

149. Опредѣлить $\cos x$ изъ уравненій:

$$\frac{\sin x}{\sin\alpha}=\frac{\sin y}{\sin\beta}=\frac{\sin z}{\sin\gamma} \text{ и } x+y+z=2\pi.$$

150. Дано: $\sin^2(n+1)x = \sin^2 nx + \sin^2(n-1)x$, гдѣ $(n+1)x$, nx и $(n-1)x$ суть углы треугольника; найти цѣлое значеніе для n.

151. Опредѣлить x изъ уравненія:

$$\cos^2 x - \cos^2\alpha = 2\cos^3 x(\cos x - \cos\alpha) - 2\sin^3 x(\sin x - \sin\alpha).$$

152. Если $\operatorname{tg}(\operatorname{ctg} x) = \operatorname{ctg}(\operatorname{tg} x)$, то существенныя значенія x опредѣлятся изъ уравненія: $\sin 2x = \frac{4}{(2n+1)\pi}$, гдѣ n цѣлое число, за исключеніемъ $n=0$ и $n=1$.

153. Найти тригонометрическія величины для угла $\frac{1}{2}\alpha$, когда $\cos\alpha = 0{,}48$ и $\angle\alpha$ принадлежитъ первой четверти.

154. Найти тригонометрическія величины для угла $\frac{1}{2}\alpha$, когда $\cos\alpha = -\frac{3}{7}$ и $\angle\alpha$ принадлежитъ третьей четверти.

155. Найти $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, когда $\cos\alpha = \frac{2ab}{a^2+b^2}$.

156. Найти тригонометрическія величины для угла $\frac{1}{2}\alpha$, когда $\sin\alpha = 0{,}6$ и $\angle\alpha$ принадлежитъ второй четверти.

157. Найти тригонометрическія величины для угла $\frac{1}{2}\alpha$, когда $\sin\alpha = -\frac{2}{3}$ и $\angle\alpha$ принадлежитъ четвертой четверти.

158. Найти тригонометрическія величины для угла $\frac{1}{2}\alpha$, когда $\operatorname{tg}\alpha = 7$ и $\angle\alpha$ принадлежитъ третьей четверти.

159. $\sin\frac{\alpha}{2} = 0{,}4$; опредѣлить: $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$.

160. $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1}{5}}$; опредѣлить: $\operatorname{ctg}\alpha$ и $\operatorname{cosec}\alpha$.

161. Найти тригонометрическія величины для угла α, когда $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{26} - 5$ и $\angle\alpha$ принадлежитъ первой четверти.

162. Опредѣлить: $\sin 7^\circ 30'$, $\cos 7^\circ 30'$ и $\operatorname{tg} 7^\circ 30'$.

163. Опредѣлить: sin, cos и ctg угла въ $67^\circ 30'$.

164. Найти $\sin 3^\circ$ и $\cos 3^\circ$.

165. Показать, что $\operatorname{tg} 142^\circ 30' = 2 + \sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{6}$.

166. Показать, что $2\sin\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{1+\sin\alpha} - \sqrt{1-\sin\alpha}$, когда α заключается между 405° и 495°.

167. Опредѣлить $\sin\frac{\alpha}{2}$ въ зависимости отъ $\sin\alpha$, когда $\frac{\alpha}{2}$ заключается между -45° и -135°.

168. Опредѣлить такіе предѣлы для угла α, чтобы

$$2\sin\alpha = -\sqrt{1+\sin 2\alpha} + \sqrt{1-\sin 2\alpha},$$
$$2\cos\alpha = -\sqrt{1+\sin 2\alpha} - \sqrt{1-\sin 2\alpha}.$$

169. Опредѣлить такіе предѣлы для угла α, чтобы

$$2\cos\alpha = -\sqrt{1+\sin 2\alpha} + \sqrt{1-\sin 2\alpha}.$$

170. Опредѣлить такіе предѣлы для угла α, чтобы

$$2\sin\alpha = \sqrt{1+\sin 2\alpha} - \sqrt{1-\sin 2\alpha}.$$

171. Возьмемъ окружность, которой центръ O, и проведемъ діаметръ AB; изъ какой нибудь точки P, взятой на окружности, опустимъ перпендикуляръ PM на діаметръ AB и соединимъ прямыми точку P съ точками A и B. Замѣтивъ, что углы BPM и PAM равны половинѣ угла POM, доказать, изъ чертежа, что

$$\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}.$$

Опредѣлить x изъ уравненій (172—176):

172. $a(1+\cos x) = b\cos\frac{x}{2}$. **173.** $\operatorname{cosec} x = \operatorname{cosec}\frac{x}{2}$.

174. $a(1-\cos x) = b\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. **175.** $\operatorname{cosec}^2\frac{x}{2} - \sec^2\frac{x}{2} = 2\sqrt{3}\operatorname{cosec}^2 x$.

176. $\operatorname{tg} x + 2\operatorname{ctg} 2x = \sin x\left(1+\operatorname{tg} x\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$.

177. Опредѣлить $\operatorname{tg} x$ изъ уравненія: $\operatorname{tg} x = (2+\sqrt{3})\operatorname{tg}\frac{x}{3}$.

178. Опредѣлить $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ изъ уравненія: $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\operatorname{tg} x + c - 1}{\operatorname{tg} x + c + 1}$.

Показать, что

179. $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{\operatorname{vers}\alpha}}$.

180. $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{2\sin\alpha - \sin 2\alpha}{2\sin\alpha + \sin 2\alpha}$. **181.** $\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sec\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{\sec\alpha - \operatorname{tg}\alpha}$.

182. $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)\, 2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right) = \left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)^2$.

183. $\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg} 2\alpha}{\sin\alpha} = \left(1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)$.

184. $\sqrt{1+\sin\alpha} = 1 + 2\sin\frac{\alpha}{4}\sqrt{1-\sin\frac{\alpha}{2}}$.

185. Если $\cos x = \frac{a\cos\varphi - b}{a - b\cos\varphi}$, то $\operatorname{tg}\frac{x}{2} : \sqrt{a+b} = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} : \sqrt{a-b}$.

186. Если $\sec(\varphi+\alpha) + \sec(\varphi-\alpha) = 2\sec\varphi$, то $\cos\varphi = \sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}$.

187. Если $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \left(\frac{1+c}{1-c}\right)^{\frac{1}{2}}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$, то $\cos x = \frac{\cos\varphi - c}{1 - c\cos\varphi}$.

188. Если α, β, γ составляютъ ариѳметическую прогрессію, то

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)} - \frac{\sin(\beta+\gamma)}{\sin(\beta-\gamma)} = 2\cos 2\beta.$$

189. Если $\frac{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}{\operatorname{tg}\alpha} + \frac{\sin^2\gamma}{\sin^2\alpha} = 1$, то $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\gamma$.

190. Если $\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\beta} = \frac{\cos\beta(\cos x - \cos\alpha)}{\cos\alpha(\cos x - \cos\beta)}$, то $\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} = \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}$.

191. Если $\cos\alpha = \cos\beta\cos\psi = \cos\beta'\cos\psi'$ и $\sin\alpha = 2\sin\frac{\psi}{2}\sin\frac{\psi'}{2}$, то

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\beta'}{2}.$$

192. $\sin(\alpha-\beta) : \sin x = \sin(\alpha+x) : \sin\beta$, то

$$\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg}\beta = \operatorname{ctg}(\alpha+x) + \operatorname{ctg}(\alpha-\beta).$$

193. Если $\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sin x} - \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg} x}\right)^2 = \operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\beta$, то $\cos x = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}$.

194. Если $\operatorname{tg}\psi = \cos x\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha' = \operatorname{tg} x\sin\psi$, то одна изъ величинъ

$$\operatorname{tg}^2\frac{\psi}{2} \text{ есть } \operatorname{tg}\frac{\alpha+\alpha'}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha-\alpha'}{2}.$$

195. Если $\sin(\beta+\gamma-\alpha)$, $\sin(\alpha+\gamma-\beta)$ и $\sin(\alpha+\beta-\gamma)$ будутъ составлять ариѳметическую прогрессію, то $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$ и $\operatorname{tg}\gamma$ будутъ также составлять ариѳметическую прогрессію.

196. Если синусы угловъ треугольника составляютъ ариѳметическую прогрессію, то и котангенсы половинъ этихъ угловъ составляютъ также ариѳметическую прогрессію.

197. Если α, β и γ углы треугольника и $\sin\left(\alpha+\frac{\gamma}{2}\right) = n.\sin\frac{\gamma}{2}$,

то $$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{n-1}{n+1}.$$

198. Если $\frac{\sin(\vartheta-\alpha)}{\sin(\vartheta-\beta)} = \frac{a}{b}$ и $\frac{\cos(\vartheta-\alpha)}{\cos(\vartheta-\beta)} = \frac{a'}{b'}$, то $\cos(\alpha-\beta) =$

$$= \frac{aa'+bb'}{ab'+a'b}.$$

199. Дано: $\operatorname{tg}\psi = \frac{\sin\vartheta\cos\vartheta'}{\sin\vartheta' + \cos\vartheta}$; показать, что одна изъ величинъ $\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}$ есть $\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\vartheta'}{2}\right)$.

Исключить x изъ уравненій (200—204):

200. $\operatorname{cosec} x - \sin x = m$, $\sec x - \cos x = n$.

201. $\sin x + \cos x = m$, $\sec x + \operatorname{cosec} x = n$.

202. $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = m$, $\sec x + \operatorname{cosec} x = n$.

203. $\sin x + \cos x = m$, $\operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg} 2x = n$.

204. $\sin x + \cos x = m$, $\sin^3 x + \cos^3 x = n$.

205. Исключить ϑ изъ уравненій:

$$x\sin\vartheta - y\cos\vartheta = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ и } \frac{\cos^2\vartheta}{a^2} + \frac{\sin^2\vartheta}{b^2} = \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

206. Исключить ϑ изъ уравненій:

$$(a + b)\operatorname{tg}(\vartheta - \psi) = (a - b)\operatorname{tg}(\vartheta + \psi) \text{ и } a\cos 2\psi + b\cos 2\vartheta = c.$$

207. Если $\cos\vartheta = \cos\alpha\cos\beta$, $\cos\vartheta' = \cos\alpha'\cos\beta'$ и

$$\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}\operatorname{tg}\frac{\vartheta'}{2} = \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}, \quad \text{то } \sec^2\beta = (\sec\alpha - 1)(\sec\alpha' - 1).$$

208. Чтобы выраженіе:

$$\frac{A\cos(\vartheta + \alpha) + B\sin(\vartheta + \beta)}{A'\sin(\vartheta + \alpha) + B'\cos(\vartheta + \beta)}$$

имѣло ту-же величину при всѣхъ значеніяхъ ϑ, необходимо, чтобы

$$AA' - BB' = (A'B - AB')\sin(\alpha - \beta).$$

209. Найти условіе, при которомъ одна и та-же величина ϑ удовлетворяетъ уравненіямъ:

$$a\sec^2\vartheta - b\cos\vartheta = 2a \text{ и } b\cos^2\vartheta - a\sec\vartheta = 2b.$$

210. Исключить ϑ и ψ изъ уравненій:

$$\sin\vartheta + \sin\psi = a, \ \cos\vartheta + \cos\psi = b \text{ и } \cos(\vartheta - \psi) = c.$$

211. Исключить ϑ и ψ изъ уравненій:

$$\operatorname{tg}\vartheta + \operatorname{tg}\psi = a, \ \operatorname{ctg}\vartheta + \operatorname{ctg}\psi = b \text{ и } \vartheta + \psi = c.$$

212. Исключить ϑ и ψ изъ уравненій:

$$x\cos\vartheta + y\sin\vartheta = a, \ x\cos(\vartheta + 2\psi) - y\sin(\vartheta + 2\psi) = a \text{ и}$$
$$b\sin(\vartheta + \psi) = a\sin\psi.$$

213. Исключить ϑ изъ уравненій:

$$\frac{x}{a} = \frac{\sec^2\vartheta - \cos^2\vartheta}{\sec^2\vartheta + \cos^2\vartheta} \text{ и } \frac{2b}{y} = \sec^2\vartheta + \cos^2\vartheta.$$

214. Исключить ϑ и ψ изъ уравненій:

$$\cos\vartheta = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha},\quad \cos\psi = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} \text{ и } \cos(\vartheta - \psi) = \sin\beta\sin\gamma.$$

215. Если $\dfrac{\cos x}{a_1} = \dfrac{\cos 2x}{a_2} = \dfrac{\cos 3x}{a_3}$, то $\sin^2\dfrac{x}{2} = \dfrac{2a_2 - a_1 - a_3}{4a_2}$.

216. Если $\dfrac{\sin x}{a_1} = \dfrac{\sin 3x}{a_3} = \dfrac{\sin 5x}{a_5}$, то $\dfrac{a_1 - 2a_3 + a_5}{a_3} = \dfrac{a_3 - 3a_1}{a_1}$.

217. Если $\dfrac{\cos x}{a_1} = \dfrac{\cos(x+\vartheta)}{a_2} = \dfrac{\cos(x+2\vartheta)}{a_3} = \dfrac{\cos(x+3\vartheta)}{a_4}$, то

$$\frac{a_1 + a_3}{a_2} = \frac{a_2 + a_4}{a_3}.$$

218. Если $\sin^2\psi = \dfrac{\cos 2\alpha \cos 2\alpha'}{\cos^2(\alpha + \alpha')}$, то

$$\operatorname{tg}^2\frac{\psi}{2} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} \pm \alpha\right) : \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} \pm \alpha'\right).$$

Задачи на IV отдѣлъ.

Найти предѣлы выраженій (1—13), когда α уменьшается до нуля:

1. $\dfrac{\operatorname{vers}\alpha}{\alpha\sin\alpha}$. **2.** $\dfrac{\sin m\alpha}{\sin n\alpha}$. **3.** $\dfrac{\operatorname{tg} m\alpha}{\operatorname{tg} n\alpha}$. **4.** $\dfrac{2\operatorname{ctg}\alpha}{1 - \operatorname{ctg}\alpha}$.

5. $\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha}{\sec 2\alpha - 1}$. **6.** $\dfrac{\sin\frac{1}{2}\alpha \,.\, \cos 2\alpha}{\operatorname{vers}\alpha \,.\, \operatorname{ctg}\alpha}$. **7.** $\dfrac{\sin 4\alpha \,.\, \operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{vers} 2\alpha \,.\, \operatorname{ctg}^2 2\alpha}$.

8. $\dfrac{\sin(a+\alpha) - \sin\alpha}{\alpha}$. **9.** $\dfrac{\cos(a+\alpha) - \cos\alpha}{\alpha}$.

10. $\dfrac{\operatorname{tg}(a+\alpha) - \operatorname{tg}\alpha}{\alpha}$. **11.** $\dfrac{\operatorname{ctg}(a+\alpha) - \operatorname{ctg}\alpha}{\alpha}$.

12. $\dfrac{\sec(a+\alpha) - \sec\alpha}{\alpha}$. **13.** $\dfrac{\operatorname{cosec}(a+\alpha) - \operatorname{cosec}\alpha}{\alpha}$.

14. Найти величину $(1 - x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$ при $x = 1$.

15. Найти величину $\dfrac{\sin(\omega - 60^0)}{4\cos^2\omega - 1}$ при $\omega = 60^0$.

Задачи на VI отдѣлъ.

Задачи на вычисленія по семизначнымъ таблицамъ логариѳмовъ Вега.

Найти по III таблицѣ:

1. $\lg\sin 17^0 25' 26''$. **2.** $\lg\sin 68^0 38''$. **3.** $\lg\sin 24^0 24' 52'',8$.
4. $\lg\sin 54^0 48' 40'',29$. **5.** $\lg\sin 8^0 26' 0'',09$. **6.** $\lg\cos 27^0 24''$.

7. $\lg\cos 74^0 39' 42''$. **8.** $\lg\cos 40^0 54' 18'',7$. **9.** $\lg\cos 62^0 32'',48$.
10. $\lg\cos 37^0 8' 20'',35$. **11.** $\lg\operatorname{tg} 12^0 15' 24''$. **12.** $\lg\operatorname{tg} 40^0 49' 6'',4$.
13. $\lg\operatorname{tg} 70^0 7' 43'',24$. **14.** $\lg\operatorname{tg} 52^0 3' 17'',46$. **15.** $\lg\operatorname{tg} 20' 30'',2$.
16. $\lg\operatorname{ctg} 23^0 36''$. **17.** $\lg\operatorname{ctg} 59^0 16' 23'',5$. **18.** $\lg\operatorname{ctg} 40^0 59' 32'',76$.
19. $\lg\operatorname{ctg} 77^0 44'',06$. **20.** $\lg\operatorname{ctg} 1^0 28' 4'',3$. **21.** $\lg\sec 38^0 42' 39'',7$.
22. $\lg\operatorname{cosec} 52^0 4'',15$. **23.** $\lg\sin 164^0 47' 32'',17$. **24.** $\lg\sin 300^0 29'',4$.
25. $\lg\cos 92^0 5' 46'',08$. **26.** $\lg\cos 290^0 52' 17'',24$.
27. $\lg\operatorname{tg} 100^0 34' 24'',52$. **28.** $\lg\operatorname{ctg} 186^0 54' 8'',91$.

Найти x, когда *)

29. $\lg\sin x = 9{,}6168848$. **30.** $\lg\sin x = 9{,}8829500$.
31. $\lg\sin x = 9{,}9536891$. **32.** $\lg\sin x = 8{,}2811012$.
33. $\lg\sin x = 9$. **34.** $\lg\cos x = 9{,}9814662$.
35. $\lg\cos x = 9{,}7241328$. **36.** $\lg\cos x = 9{,}3853129$.
37. $\lg\cos x = 9{,}9084594$. **38.** $\lg\cos x = 9{,}8489632$.
39. $\lg\operatorname{tg} x = 9{,}7688812$. **40.** $\lg\operatorname{tg} x = 0{,}1918513$.
41. $\lg\operatorname{tg} x = 9{,}9998654$. **42.** $\lg\operatorname{tg} x = 1{,}6600007$.
43. $\lg\operatorname{tg} x = 8{,}7038265$. **44.** $\lg\operatorname{ctg} x = 0{,}2174324$.
45. $\lg\operatorname{ctg} x = 9{,}9304766$. **46.** $\lg\operatorname{ctg} x = 0{,}5356674$.
47. $\lg\operatorname{ctg} x = 9{,}3116417$. **48.** $\lg\operatorname{ctg} x = 2{,}2105176$.
49. $\lg\sec x = 0{,}0060322$. **50.** $\lg\csc x = 1{,}0000973$.

Найти по II таблицѣ логариѳмовъ Вега (51—70):

51. $\lg\sin 4^0 17' 36''$. **52.** $\lg\sin 1^0 36' 8'',096$. **53.** $\lg\sin 29' 41'',377$.
54. $\lg\cos 87^0 49' 42''$. **55.** $\lg\cos 86^0 30'',72$. **56.** $\lg\operatorname{tg} 1^0 54' 42''$.
57. $\lg\operatorname{tg} 4^0 32' 6'',3$. **58.** $\lg\operatorname{tg} 15' 0'',0746$. **59.** $\lg\operatorname{ctg} 89^0 16' 35'',8$.
60. $\lg\operatorname{ctg} 87^0 46'',19$.

Найти x, когда

61. $\lg\sin x = 8{,}8742655$. **62.** $\lg\sin x = 8{,}4465507$.
63. $\lg\sin x = 8{,}5457211$. **64.** $\lg\cos x = 8{,}5785665$.
65. $\lg\cos x = 8{,}2549090$. **66.** $\lg\cos x = 7{,}7425895$.
67. $\lg\operatorname{tg} x = 8{,}5234507$. **68.** $\lg\operatorname{tg} x = 7{,}6398561$.
69. $\lg\operatorname{ctg} x = 8{,}1012723$. **70.** $\lg\operatorname{ctg} x = 8{,}7854461$.

Найти по таблицамъ Деламбра (71—88):

71. $\lg\sin 1^0 28' 34''$. **72.** $\lg\sin 39' 46'',248$. **73.** $\lg\sin 52'',3078$.
74. $\lg\cos 89^0 14' 36'',4$. **75.** $\lg\cos 88^0 29'',17$. **76.** $\lg\operatorname{tg} 2^0 26'',75$.
77. $\lg\operatorname{tg} 38' 30'',456$. **78.** $\lg\operatorname{tg} 40'',7086$.
79. $\lg\operatorname{ctg} 87^0 49' 24'',5$. **80.** $\lg\operatorname{ctg} 88^0 5' 16'',54$.

---

*) Здѣсь даны табличные логариѳмы.

Найти x, когда

81. $\lg \sin x = 8{,}4109485$. **82.** $\lg \sin x = 7{,}6437036$.
83. $\lg \cos x = 8{,}1207056$. **84.** $\lg \cos x = 6{,}2911385$.
85. $\lg \operatorname{tg} x = 8{,}5045224$. **86.** $\lg \operatorname{tg} x = 6{,}2952611$.
87. $\lg \operatorname{ctg} x = 8{,}5235428$. **88.** $\lg \operatorname{ctg} x = 8{,}2386408$.

Найти:

89. $\sin 41^0 49' 16''$. **90.** $\sin 79^0 48'',7$. **91.** $\cos 58^0 56' 39''$.
92. $\cos 27^0 34' 9'',4$. **93.** $\operatorname{tg} 25^0 27' 23''$. **94.** $\operatorname{tg} 82^0 50'',46$.
95. $\operatorname{ctg} 17^0 48' 29'',18$. **96.** $\operatorname{ctg} 85^0 56' 7'',07$. **97.** $\sec 59^0 0'',44$.
98. $\operatorname{cosec} 65^0 16'',74$. **99.** $\sin 147^0 46' 3'',19$. **100.** $\cos 212^0 0'',58$.
101. $\operatorname{tg} 312^0 19' 18'',08$. **102.** $\operatorname{ctg} 110^0 47' 39'',7$. **103.** $\sin 1000^0 25' 27''$.
104. $\cos 821^0 39'',18$. **105.** $\operatorname{tg} 564^0 51' 2'',47$. **106.** $\operatorname{ctg} 944^0 0'',75$.

Найти наименьшую положительную величину x (107—124):

107. $\sin x = 0{,}726$. **108.** $\sin x = \frac{148}{317}$. **109.** $\sin x = 1{,}8$.
110. $\cos x = 0{,}62$. **111.** $\cos x = \frac{17}{35}$. **112.** $\operatorname{tg} x = 5{,}62$.
113. $\operatorname{tg} x = 10\frac{19}{42}$. **114.** $\operatorname{tg} x = 0{,}820498$. **115.** $\operatorname{ctg} x = 70$.
116. $\operatorname{ctg} x = 0{,}0446$. **117.** $\sec x = 1{,}22$. **118.** $\operatorname{cosec} x = 3$.
119. $\sin x = -0{,}575$. **120.** $\cos x = -\frac{15}{47}$. **121.** $\operatorname{tg} x = -1{,}7$.
122. $\operatorname{ctg} x = -3\frac{4}{7}$. **123.** $\sec x = -1{,}8$. **124.** $\operatorname{cosec} x = -10$.

Найти всѣ величины для угла x, въ промежуткѣ отъ 0^0 до 360^0, когда

125. $\sin x = -0{,}47$. **126.** $\cos x = \frac{15}{49}$. **127.** $\operatorname{tg} x = -5$.
128. $\operatorname{ctg} x = 0{,}7234$. **129.** $\sec x = -3$. **130.** $\operatorname{cosec} x = 4{,}35$.

Найти всѣ величины для угла x отъ 180^0 до 540^0, когда

131. $\sin x = 0{,}7$. **132.** $\cos x = -0{,}912$. **133.** $\operatorname{tg} x = \frac{92}{45}$.
134. $\operatorname{ctg} x = -10$. **135.** $\sec x = 8{,}2$. **136.** $\operatorname{cosec} x = -4$.

Найти:

137. $42 \sin 38^0 59' 36'',78$. **138.** $0{,}049 \operatorname{ctg} 40^0 47' 48'',09$.

139. $\dfrac{\operatorname{ctg} 72^0 16' 22'',4}{0{,}948686}$. **140.** $\dfrac{\sin 48^0 29'',36}{12{,}1764}$. **141.** $\dfrac{\operatorname{tg} 28^0 29' 37'',45}{1{,}06 \cos 61^0 24''}$.

142. $\dfrac{2{,}65 \operatorname{ctg} 85^0 54'',37}{\sin 40^0 47' 30'',28}$. **143.** $0{,}568 \cdot \dfrac{\cos 34^0 50'',42}{\operatorname{tg} 59^0 48' 27''}$.

144. $(\operatorname{tg} 44^0 49' 52'',06)^{12}$. **145.** $(\cos 39^0 39' 14'',22)^{0,36}$.

146. $(\operatorname{ctg} 25^0 15' 7'',28)^{-1,08}$. **147.** $\sqrt[86]{\operatorname{ctg} 51^0 59' 52'',06}$.

148. $\sqrt[25]{\sin 200^0 16'',28}$. **149.** $(\operatorname{tg} 42^0 42' 42'',71)^{1,5} - 0,862$.

150. $1,7 + \sqrt[96]{\operatorname{ctg} 64^0 16' 25'',6}$. **151.** $(1,004 - \cos 59^0 28' 3'',17)^{-0,12}$.

152. $\sqrt[58]{\operatorname{ctg} 40^0 28' 37'',08 - 1,171}$. **153.** $0,36 + (\operatorname{tg} 30^0 35' 40'',26)^{\frac{13}{45}}$.

154. $(\operatorname{cosec} 16^0 16'',18 - 3,612)^{\frac{34}{75}}$. **155.** $\sqrt[29]{(\operatorname{ctg} 36^0 39' 38'',4)^{-15}}$.

156. $(\sqrt[37]{\operatorname{tg} 325^0 34'',19} + 1,001)^{0,042}$. **157.** $0,28 (\cos 40^0 40' 36'',09)^{1,06}$.

158. $(1,4 \sin 4^0 47'',184)^{-0,72}$.

159. $2,08 \sqrt[35]{\operatorname{tg} 35^0 16' 30'',56}$. **160.** $\sqrt[64]{0,00014 \operatorname{ctg} 70^0 2'',45}$.

161. $\dfrac{0,2452868}{(\cos 48^0 4' 4'',07)^{0,27}}$. **162.** $\dfrac{0,002486872}{\sqrt[64]{\operatorname{tg} 12^0 49' 49'',07}}$.

163. $\left(\dfrac{0,02068564}{\operatorname{tg} 44^0 4' 56'',29}\right)^{0,15}$. **164.** $\sqrt[68]{\dfrac{0,000001}{\cos 68^0 26' 24'',24}}$.

165. $\dfrac{\operatorname{tg} 20^0 20' 26'',56}{\sqrt[50]{\cos 52^0 56' 17'',2}}$. **166.** $\dfrac{7 \sec 15^0 19' 29'',42}{18 (\sin 58^0 3' 7'')^{0,076}}$.

167. $\dfrac{(\sin 15^0 19' 47'',12)^{1,3}}{\sqrt[45]{\cos 59^0 26' 34'',7}}$. **168.** $\dfrac{0,24 \sin 56^0 56' 49'',7}{\left(\sqrt[15]{\cos 30^0 34''}\right)^{29}}$.

169. $\left(\sqrt[76]{\dfrac{\operatorname{ctg} 52^0 5' 34'',18}{\operatorname{tg} 40^0 49''}}\right)^{-35}$. **170.** $\dfrac{0,148769 (\sin 12^0)^{0,47}}{\sqrt[39]{\operatorname{ctg} 66^0 50' 16'',38}}$.

171. $\dfrac{(3,6 - \operatorname{ctg} 16^0 15'',3)^{0,43}}{\operatorname{tg} 59^0 38' 16'',57}$. **172.** $\dfrac{\sqrt[59]{0,14 + \operatorname{tg} 20^0 2' 4'',3}}{\cos 72^0 16' 43'',28}$.

173. $\dfrac{1,03 - \operatorname{ctg} 49^0 9' 4''}{\sqrt[76]{\sin 30^0 50' 56'',09}}$. **174.** $\dfrac{(0,906 - \sin 57^0 5'',64)^{1,02}}{\sqrt[98]{\cos 24^0 24' 42'',42}}$.

Найти наименьшее положительное значеніе для x:

175. $\cos x = \operatorname{tg} 17^0 24' 28'',57$. **176.** $\sin x = 0,18 \operatorname{ctg} 39^0 4' 5'',09$.

177. $\operatorname{tg} x = 0,46 + \cos 19^0 19' 2'',68$.

178. $\operatorname{ctg} x = \sin 49^0 47' 41'',72 - 4,8$.

179. $\sin x = \dfrac{\cos 80^0 24' 35'',39}{0,4247564}$. **180.** $\cos x = \dfrac{0,3253286}{\operatorname{tg} 49^0 47' 4'',25}$.

181. $\sin x = -\dfrac{\cos 69^0 42' 56'',08}{\operatorname{tg} 39^0 2' 41'',75}$.

182. $\operatorname{tg} x = -\dfrac{\cos 40^0 12' 16''}{\operatorname{ctg} 52^0 4' 45'',54}$.

183. $\operatorname{ctg} x = \frac{\operatorname{tg} 29^0 32' 34'',34}{12 \cos 51^0 52' 51'',69}$.

184. $\cos x = \frac{\sin 160^0 . \operatorname{ctg} 68^0 2' 0'',7}{0,96 \operatorname{tg} 43^0 47' 24'',36}$.

185. $\operatorname{tg} x = (\sec 15^0 15' 18'',97)^{-0,48}$.

186. $\cos x = (\operatorname{tg} 40^0 27' 23'',35)^{1,4}$.

187. $\operatorname{ctg} x = \sqrt[46]{\sin 5^0 45' 21'',15}$. **188.** $\sin x = \sqrt[-56]{\operatorname{ctg} 19^0 29' 0'',73}$.

189. $\operatorname{tg} x = (0,8)^{0,24} . \cos 17^0 57' 2'',26$.

190. $\cos x = (0,05 + \sin 52^0 15' 7'',8)^{0,14}$.

191. $\operatorname{ctg} x = \sqrt[75]{1,03 - \operatorname{tg} 39^0 34' 36'',75}$.

192. $\sin x = (1,62 + \cos 64^0 4' 16'',94)^{-0,36}$.

193. $\operatorname{tg} x = (\operatorname{ctg} 15^0 19' 30'',07 - 2,97)^{1,8}$.

194. $\sin x = \sqrt[47]{\frac{\cos 64^0 6' 29'',82}{148,0268}}$.

195. $\operatorname{tg} x = \sqrt[49]{\frac{\cos 54^0 25' 26'',14}{9006284}}$.

196. $\sin x = \frac{\operatorname{tg} 20^0 28' 35'',72}{\sqrt[58]{\operatorname{ctg} 70^0 7' 19'',39}}$. **197.** $\cos x = \frac{\sqrt[46]{\sin 50^0 50' 57''}}{\operatorname{ctg} 208^0 22' 23'',61}$.

198. $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos 60^0 16' 24'',37}{(\operatorname{tg} 38^0 39' 17'')^{0,35}}$. **199.** $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{ctg} 78^0 17' 38'',12}{(\sin 40^0 48' 26'')^{0,013}}$.

200. $\cos x = \left(\frac{0,04982876}{\sin 52^0 37' 20'',75}\right)^{1,04}$.

201. $\cos x = \frac{1,82 - \operatorname{tg} 45^0 8'',77}{\sqrt[75]{\cos 60^0 56' 23'',06}}$.

202. $\sin x = \frac{\cos 34^0 47' 32'',26}{\sqrt[47]{1,9 - \operatorname{tg} 58^0 2' 34'',82}}$.

203. $\operatorname{tg} x = \frac{(\operatorname{ctg} 22^0 13' 27'',74 - 2,44)^{0,28}}{\sin 48^0 46' 52'',47}$.

204. $\operatorname{cosec} x = \frac{\sqrt[42]{\cos 64^0 37' 27'',39}}{0,7 \operatorname{tg} 43^0 45' 54'',46}$.

205. $\operatorname{tg} x = \frac{1,2 (\cos 70^0 19' 48'',4)^{0,57}}{\sqrt[75]{\operatorname{tg} 12^0 35' 16'',38}}$.

206. $\sin x = \left(\frac{\cos 69^0 52' 34'',08}{\sqrt[76]{\operatorname{tg} 5^0 34'' - 0,0745}}\right)^{0,75}$.

207. $\sec x = \sqrt[92]{\dfrac{(1{,}03 - \sin 54^0 48' 16'',37)^{-0,16}}{0{,}0728 \operatorname{ctg} 37^0 4' 34'',7}}$.

208. $\cos x = \dfrac{(\operatorname{tg} 72^0 8' 19'',6)^{-0,43} + 0{,}018}{2{,}4 \sqrt[36]{\sin 20^0 40' 41'',28}}$.

209. $\operatorname{tg} x = (1{,}2 - \cos 59^0 28'',7)^{0,36} \cdot \dfrac{0{,}7148628}{\sqrt[54]{\sin 17^0 18' 27'',82}}$.

210. $\operatorname{ctg} x = \dfrac{(0{,}17 \sin 24^0 28' 2'',8)^{0,47} - 0{,}168}{\sqrt[87]{(\cos 71^0 42' 57'',38)^{71}}}$.

Найти величины:

211. $\sin 2{,}56$. **212.** $\cos \dfrac{1}{\pi}$. **213.** $\cos \sqrt[28]{0{,}47563}$.

214. $\operatorname{tg} \cos 42^0 18' 32'',15$. **215.** $\sin \sqrt[48]{\cos 16^0 42' 18''}$.

216. $\sqrt[8]{\dfrac{\cos (0{,}456 - \sqrt[50]{0{,}472})}{(\operatorname{tg} 39^0 1' 25'')^{\frac{14}{27}}}}$. **217.** $\sqrt[30]{\cos \sqrt[40]{\sin \sqrt[50]{0{,}5}}}$.

218. $(\cos 2^0)^{\sin 2^0}$. **219.** $\sqrt[\cos 1]{\sin \sqrt[10]{10}}$.

Опредѣлить x изъ уравненія:

220. $2^{\cos x} = 1{,}5$. **221.** $(\sin 16^0 19'')^{\operatorname{ctg} x} = \cos 16^0 19''$.

222. $\left(\sqrt[45]{\operatorname{tg} 40^0 42'',6}\right)^{\sin x} = \operatorname{ctg} 45^0 4' 28''$.

Задачи на вычисленія по пятизначнымъ таблицамъ логариѳмовъ.

Найти:

223. $\lg \sin 27^0 43' 27''$. **224.** $\lg \sin 50^0 17' 38''$. **225.** $\lg \sin 32^0 46''$.
226. $\lg \sin 2^0 48' 19''$. **227.** $\lg \cos 17^0 32' 35''$. **228.** $\lg \cos 47^0 5' 24''$.
229. $\lg \cos 56^0 17''$. **230.** $\lg \cos 87^0 20' 38''$. **231.** $\lg \operatorname{tg} 30^0 6' 43''$.
232. $\lg \operatorname{tg} 82^0 53' 8''$. **233.** $\lg \operatorname{tg} 48^0 47' 24''$. **234.** $\lg \operatorname{tg} 1^0 58' 16''$.
235. $\lg \operatorname{ctg} 5^0 29' 38''$. **236.** $\lg \operatorname{ctg} 26^0 17''$. **237.** $\lg \operatorname{ctg} 49^0 8' 23''$.
238. $\lg \operatorname{ctg} 80^0 41' 51''$. **239.** $\lg \sec 40^0 17' 35''$. **240.** $\lg \operatorname{cosec} 60^0 48''$.
241. $\lg \sin 164^0 47' 32''$. **242.** $\lg \sin 250^0 13' 25''$. **243.** $\lg \cos 93^0 46''$.
244. $\lg \cos 310^0 10' 18''$. **245.** $\lg \operatorname{tg} 194^0 4' 53''$. **246.** $\lg \operatorname{ctg} 341^0 17' 46''$.

Найти наименьшую положительную величину x, когда

247. $\lg \sin x = 9{,}81703$. **248.** $\lg \sin x = 9{,}92406$.
249. $\lg \sin x = 9{,}96375$. **250.** $\lg \cos x = 9{,}96465$.
251. $\lg \cos x = 8{,}71743$. **252.** $\lg \cos x = 9{,}99770$.

253. $\lg \operatorname{tg} x = 9{,}80770$. **254.** $\lg \operatorname{tg} x = 0{,}00349$.
255. $\lg \operatorname{tg} x = 8{,}70914$. **256.** $\lg \operatorname{ctg} x = 0{,}76537$.
257. $\lg \operatorname{ctg} x = 0{,}13463$. **258.** $\lg \operatorname{ctg} x = 9{,}92019$.
259. $\lg \sec x = 0{,}39513$. **260.** $\lg \sec x = 9{,}92068$.
261. $\lg \csc x = 1{,}09326$.

Найти по таблицамъ Деламбра (262 — 279) *):

262. $\lg \sin 1^0 28' 34''$. **263.** $\lg \sin 39' 46'',4$. **264.** $\lg \sin 48'',38$.
265. $\lg \cos 87^0 59' 41''$. **266.** $\lg \cos 89^0 36' 55'',7$. **267.** $\lg \operatorname{tg} 35' 47'',096$.
268. $\lg \operatorname{tg} 2^0 26'',4$. **269.** $\lg \operatorname{ctg} 89^0 59' 29'',52$. **270.** $\lg \operatorname{ctg} 87^0 38' 43''$.

Найти наименьшую положительную величину x, когда

271. $\lg \sin x = 8{,}15943$. **272.** $\lg \sin x = 8{,}37500$.
273. $\lg \sin x = 6{,}74719$. **274.** $\lg \cos x = 8{,}53612$.
275. $\lg \cos x = 7{,}98300$. **276.** $\lg \operatorname{tg} x = 8{,}54901$.
277. $\lg \operatorname{tg} x = 7{,}71000$. **278.** $\lg \operatorname{ctg} x = 7{,}49076$.
279. $\lg \operatorname{ctg} x = 8{,}47400$.

Найти:

280. $\sin 60^0 28' 34$. **281.** $\sin 3^0 26''$. **282.** $\cos 48^0 13' 8''$.
283. $\cos 86^0 36' 19''$. **284.** $\operatorname{tg} 4^0 13''$. **285.** $\operatorname{tg} 59^0 50' 34''$.
286. $\operatorname{ctg} 79^0 37''$. **287.** $\operatorname{ctg} 8^0 15' 40''$. **288.** $\sec 56^0 32''$.
289. $\operatorname{cosec} 80^0 5' 25''$. **290.** $\sin 147^0 46' 18''$. **291.** $\sin 301^0 9' 43''$.
292. $\cos 98^0 27' 24''$. **293.** $\cos 200^0 39''$. **294.** $\operatorname{tg} 115^0 37''$.
295. $\operatorname{tg} 281^0 1' 15''$. **296.** $\operatorname{ctg} 260^0 3' 44''$. **297.** $\sin 1000^0 25' 27''$.
298. $\cos 821^0 39''$. **299.** $\operatorname{tg} 564^0 51' 7''$. **300.** $\operatorname{ctg} 951^0 18''$.

Найти наименьшую положительную величину x, когда

301. $\sin x = 0{,}726$. **302.** $\sin x = 0{,}049876$. **303.** $\sin x = \frac{149}{317}$.
304. $\cos x = 0{,}82$. **305.** $\cos x = \frac{17}{45}$. **306.** $\cos x = 0{,}0875$.
307. $\operatorname{tg} x = 0{,}90402$. **308.** $\operatorname{tg} x = 5{,}62$. **309.** $\operatorname{ctg} x = 70$.
310. $\operatorname{ctg} x = 0{,}0446$. **311.** $\sec x = 1{,}22$. **312.** $\operatorname{cosec} x = 3$.
313. $\sin x = -0{,}575$. **314.** $\cos x = -\frac{15}{47}$. **315.** $\operatorname{tg} x = -1{,}7$.
316. $\operatorname{ctg} x = -3\frac{4}{7}$. **317.** $\sec x = -27$. **318.** $\operatorname{cosec} x = -0{,}65$.

Найти всѣ величины для угла x отъ 0^0 до 360^0, когда

319. $\sin x = -0{,}47$. **320.** $\cos x = \frac{15}{49}$. **321.** $\operatorname{tg} x = -5$.
322. $\operatorname{ctg} x = 0{,}7234$. **323.** $\sec x = -3$. **324.** $\operatorname{cosec} x = 4{,}35$.

Найти:

325. $0{,}12 + \cos 72^0 29''$. **326.** $\operatorname{tg} 39^0 28' 33'' - 1{,}4$.

---

*) См. внизу стр. 1 — 32 въ пятизначн. логариѳм., изд. мною.

327. $-0{,}75+\sin 247^0 47'5''$. **328.** $\operatorname{tg} 340^0 5'29''+16$.

329. $42 \sin 38^0 59'37''$. **330.** $0{,}049 \operatorname{ctg} 40^0 47'48''$.

331. $\frac{\operatorname{ctg} 72^0 16'22''}{0{,}948686}$. **332.** $\frac{\sin 48^0 29''}{12{,}1764}$. **333.** $\frac{\operatorname{tg} 28^0 29'37''}{1{,}06 \cos 61^0 24''}$.

334. $\frac{2{,}65 \operatorname{ctg} 85^0 54''}{\sin 40^0 47'31''}$. **335.** $\frac{1{,}2573}{0{,}8 \operatorname{ctg} 23^0 12' \,.\, \operatorname{tg} 40^0 35''}$.

336. $0{,}568 \,.\, \frac{\cos 34^0 51''}{\operatorname{tg} 59^0 48'29''}$. **337.** $(\operatorname{tg} 44^0 49'52'')^{12}$.

338. $(\cos 39^0 39'14'')^{0{,}36}$. **339.** $(\operatorname{ctg} 25^0 15'27'')^{-1{,}08}$.

340. $\sqrt[86]{\operatorname{ctg} 51^0 59'52''}$. **341.** $\sqrt[25]{\sin 200^0 16''}$.

342. $\sqrt[-16]{\operatorname{tg} 60^0 20'21''}$. **343.** $(\operatorname{tg} 42^0 42'43'')^{1{,}5}-0{,}862$.

344. $1{,}7+\sqrt[96]{\operatorname{ctg} 64^0 16'26''}$. **345.** $(0{,}16+\sin 19^0 19'')^{0{,}94}$.

346. $(1{,}004-\cos 59^0 28'3'')^{-0{,}12}$. **347.** $\sqrt[58]{\operatorname{ctg} 40^0 28'31''-1{,}171}$.

348. $(\cos 49^0 27'28'')^{\frac{17}{24}}$. **349.** $\sqrt[29]{(\operatorname{ctg} 36^0 39'38'')^{-15}}$.

350. $\sqrt[75]{(\cos 80^0 54'13'')^{1{,}3}-1{,}0246}$. **351.** $0{,}28\,(\cos 40^0 40'36'')^{1{,}06}$.

352. $(1{,}4 \sin 4^0 47'')^{-0{,}72}$. **353.** $\sin 6^0 \sqrt[29]{\cos 52^0 37''}$.

354. $\sqrt[46]{0{,}00014 \operatorname{ctg} 70^0 12''}$. **355.** $\frac{0{,}24529}{(\cos 48^0 4'24'')^{0{,}27}}$.

356. $\frac{(\operatorname{tg} 35^0 16'15'')^{0{,}36}}{1{,}29727}$. **357.** $\frac{\sqrt[54]{0{,}0149827}}{\cos 28^0 29'31''}$. **358.** $\frac{0{,}0024869}{\sqrt[64]{\operatorname{tg} 12^0 49'49''}}$.

359. $\left(\frac{\sin 20^0 28'23''}{0{,}88857}\right)^{-0{,}76}$. **360.** $\sqrt[68]{\frac{0{,}000001}{\cos 68^0 26'24''}}$.

361. $\frac{\sin 15^0 19'37''}{(\operatorname{ctg} 60^0 36'')^{0{,}29}}$. **362.** $\frac{\operatorname{tg} 20^0 20'27''}{\sqrt[50]{\cos 52^0 56'17''}}$.

363. $\sqrt[48]{0{,}008\,(\sin 26^0 35'26'')^{31}}$. **364.** $\sqrt[65]{(0{,}28)^{96} \,.\, \operatorname{tg} 48^0 3'55''}$.

365. $\frac{(0{,}049 \sin 24^0 14'')^{0{,}27}}{\cos 46^0 28'52''}$. **366.** $\frac{0{,}24 \sin 56^0 56'49''}{\left(\sqrt[15]{\cos 30^0 24''}\right)^{29}}$.

367. $\sqrt[48]{\left(\frac{\sin 16^0 48'29''}{\cos 70^0 6''}\right)^{53}}$. **368.** $\left(\sqrt[76]{\frac{\operatorname{ctg} 52^0 5'34''}{\operatorname{tg} 40^0 49''}}\right)^{-35}$.

369. $\frac{(3{,}6-\operatorname{ctg} 16^0 15'')^{0{,}43}}{\operatorname{tg} 59^0 38'17''}$. **370.** $\frac{\sqrt[59]{0{,}14+\operatorname{tg} 20^0 1'53''}}{\cos 72^0 16'43''}$.

371. $\dfrac{1{,}03-\operatorname{ctg}49^0 8'43''}{\sqrt[76]{\sin 30^0 50'56''}}$. **372.** $\sqrt[75]{\dfrac{\cos 80^0 17'5''-0{,}34}{(\operatorname{tg}38^0 29'57'')^{-71}}}$.

373. $\left(\dfrac{\sqrt[72]{\sec 49^0 7'48''-1{,}2}}{\operatorname{tg}44^0 48'31''}\right)^{-0{,}046}$.

Найти наименьшую положительную величину для x, когда

374. $\cos x=\operatorname{tg}17^0 24'29''$. **375.** $\sin x=0{,}08\operatorname{ctg}39^0 4'5''$.

376. $\operatorname{tg}x=0{,}56+\cos 19^0 18'49''$.

377. $\operatorname{ctg}x=\sin 49^0 47'42''-4{,}8$.

378. $\sin x=\dfrac{\cos 80^0 24'35''}{0{,}424756}$. **379.** $\cos x=\dfrac{0{,}32533}{\operatorname{tg}49^0 46'45''}$.

380. $\operatorname{tg}x=-\dfrac{\cos 40^0 12'16''}{\operatorname{ctg}52^0 4'46''}$. **381.** $\operatorname{ctg}x=\dfrac{\operatorname{tg}29^0 32'54''}{12\cos 51^0 52'32''}$.

382. $\operatorname{tg}x=(\sec 15^0 15'19'')^{-0{,}48}$. **383.** $\cos x=(\operatorname{tg}40^0 27'23'')^{1{,}4}$.

384. $\operatorname{ctg}x=\sqrt[46]{\sin 5^0 45'21''}$. **385.** $\sin x=\sqrt[-56]{\operatorname{ctg}19^0 29'17''}$.

386. $\cos x=(0{,}05+\sin 52^0 14'49'')^{0{,}14}$.

387. $\operatorname{ctg}x=\sqrt[75]{1{,}03-\operatorname{tg}39^0 34'36''}$.

388. $\sin x=(1{,}62+\cos 64^0 4'17'')^{-0{,}36}$.

389. $\sin x=\sqrt[47]{\dfrac{\cos 64^0 6'29''}{148{,}026}}$. **390.** $\operatorname{tg}x=\dfrac{\operatorname{ctg}78^0 17'38''}{(\sin 40^0 48'26'')^{0{,}013}}$.

391. $\sin x=\dfrac{\operatorname{tg}20^0 28'36''}{\sqrt[58]{\operatorname{ctg}70^0 7'19''}}$. **392.** $\cos x=\dfrac{\sqrt[46]{\sin 50^0 50'57''}}{\operatorname{ctg}208^0 22'24''}$.

393. $\cos x=\left(\dfrac{0{,}0498288}{\sin 52^0 37'21''}\right)^{1{,}04}$. **394.** $\operatorname{ctg}x=\sqrt[77]{\dfrac{0{,}00245674}{\operatorname{tg}72^0 51'44''}}$.

395. $\sin x=\dfrac{\sqrt[48]{1{,}04\operatorname{tg}4^0 29'34''}}{\operatorname{ctg}46^0 22'28''}$.

396. $\sec x=\dfrac{\operatorname{ctg}72^0 46'34''}{0{,}068(\sin 19^0 18'')^{0{,}39}}$.

397. $\operatorname{tg}x=\dfrac{1{,}2(\cos 70^0 19'48'')^{0{,}57}}{\sqrt[75]{\operatorname{tg}12^0 35'16''}}$.

398. $\operatorname{ctg}x=\dfrac{\sqrt[82]{0{,}17+\operatorname{tg}14^0 5'38''}}{\sin 72^0 16'42''}$.

399. $\sin x=\dfrac{\cos 34^0 47'32''}{\sqrt[47]{1{,}9-\operatorname{tg}58^0 2'35''}}$.

400. $\sec x = \sqrt[34]{\dfrac{\sin 64^0 36' 29''}{\operatorname{ctg} 39^0 4' 52''} + 0{,}728}$.

401. $\sin x = \dfrac{0{,}46 - (\operatorname{ctg} 21^0 10' 3'')^{-1{,}4}}{\sqrt[49]{\operatorname{tg} 40^0 54' 17''}}$.

402. $\operatorname{tg} x = \sqrt[37]{\dfrac{0{,}042 \sin 29^0 49' 16''}{(\cos 59^0 18' 43'')^{-0{,}16}} - 0{,}21048}$.

Задачи на VII Отдѣлъ.

Въ слѣдующихъ примѣрахъ (отъ 1 до 15 вкл.) сдѣлать формулы удобными для логариѳмическихъ вычисленій:

1. $\sin 62^0 + \sin 17^0$. **2.** $\sin 48^0 - \sin 16^0 18''$.

3. $\cos 52^0 18' + \cos 49^0 46''$. **4.** $\sin 32^0 + \cos 16^0 1' 39''$.

5. $1 + \sin\alpha + \cos\alpha$. **6.** $\sin^2 A - \sin^2 B$. **7.** $\cos^2 A - \cos^2 B$.

8. $1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta$. **9.** $\operatorname{tg} A \pm \operatorname{tg} B$. **10.** $\operatorname{ctg} A \pm \operatorname{ctg} B$.

11. $\operatorname{tg}^2 A - \operatorname{tg}^2 B$. **12.** $\operatorname{ctg}^2 A - \operatorname{ctg}^2 B$. **13.** $x = \dfrac{a - b\sin\alpha}{a + b\sin\alpha}$.

14. $x = \dfrac{a\sin\alpha + b\sin\beta}{c\sin\gamma}$. **15.** $x = \sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}$, гдѣ $a > b$.

16. $x = \sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}} + \sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}$, гдѣ $a > b$. **17.** $x = a \pm \sqrt{a^2 + b^2}$.

18. $x = b \pm \sqrt{a^2 - b^2}$, гдѣ $b < a$.

19. $x = \sqrt{\operatorname{tg}\alpha + \sin\alpha} + \sqrt{\operatorname{tg}\alpha - \sin\alpha}$.

Опредѣлить x изъ уравненій:

20. $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 10$. **21.** $\cos 6^0 12'' . \sin x + 2\cos x = 0{,}92$.

Опредѣлить x и y изъ слѣдующихъ уравненій:

22. $\sin x + \sin y = 0{,}4$, $x - y = 16^0$.

23. $\cos x - \cos y = 0{,}1$, $x + y = 72^0 48' 16''$.

24. $x + y = 16^0 17'$; $\sin x \sin y = 0{,}005$.

25. $\sin x \cos y = 0{,}70006$, $x - y = 30^0 42''$.

26. $\dfrac{\sin x}{\sin y} = 3{,}7042$, $x + y = 38^0 23' 15'',04$.

Рѣшить по логариѳмамъ уравненія (27—41):

27. $x \sin 72^0 52' 36'' + x\cos 264^0 = (0{,}01)^{0{,}01}$.

28. $3x \sin 46^0 1' 39'' = \sqrt[40]{\operatorname{tg} 40^0} - x\cos 32^0 25''$.

29. $x^2 + x\sqrt[5]{0{,}6} + 0{,}00645 = 0.$

30. $48x^2 - 256{,}4x + 938{,}25 = 0.$

31. $x^2 + 360{,}42x - 3489{,}1 = 0.$

32. $x^2 + 0{,}3245x - 0{,}01826 = 0.$

33. $x^2 \sin 16^0 + x + \cos 76^0 30' = 0.$

34. $x^2 + px - q = 0$, когда $\lg p = 2{,}9143267$ и $\lg q = 3{,}0054924$.

35. $x^2 + px + q = 0$, когда $\lg p = 3{,}0678463$ и $\lg q = 1{,}7860934$.

36. $3286 \operatorname{tg} x - 96 \operatorname{ctg}\left(45^0 + \frac{x}{2}\right) = 1851.$

37. $x^3 - 3x - 1 = 0.$ **38.** $x^3 - 7x + 7 = 0.$

39. $x^3 - 10{,}871385x + 18{,}01032 = 0.$ **40.** $x^3 - 2x^2 + 8 = 0.$

41. $x^3 + 9x^2 + 21x + 13 = 0.$

42. Раздѣлить полушаръ, котораго радіусъ равенъ 1 аршину, на двѣ равныя части плоскостью, параллельною основанію полушара.

43. Опредѣлить радіусъ окружности съ точностью до 0,000001, въ которой три хорды, соотвѣтствующія тремъ дугамъ, которыхъ сумма равна полуокружности, будутъ: 1 футъ, 2 фута и 3 фута.

Задачи на VIII отдѣлъ.

1. Стороны треугольника суть: $x^2 + x + 1$, $2x + 1$ и $x^2 - 1$; показать, что большій изъ угловъ треугольника равенъ 120^0.

Треугольникъ будетъ равнобедренный, когда

2. $c \cos B = b \cos C.$ **3.** $a \sec B = 2c.$ **4.** $\sin A = 2 \cos B \sin C.$

5. Въ прямоугольномъ треугольникѣ, гдѣ уголъ C прямой,

$$\operatorname{ctg}\frac{A}{2} = \frac{b+c}{a}.$$

6. Если въ треугольникѣ ABC изъ вершины A опустимъ перпендикуляръ AD на противолежащую сторону и изъ точки D опустимъ перпендикуляры DE и DF соотвѣтственно на стороны AB и AC, то

$$AE \cdot BE \cdot \cos^2 C = AF \cdot CF \cdot \cos^2 B.$$

7. Если D означаетъ средину стороны BC въ треугольникѣ ABC, то

$$\operatorname{ctg} BAD - \operatorname{ctg} B = 2 \operatorname{ctg} A.$$

Вывести (задачи отъ 8 до 28 вкл.) слѣдующія отношенія между сторонами и углами треугольника:

8. $(a - b\cos C)\operatorname{tg} B = b \sin C.$ **9.** $a(b\cos C - c\cos B) = b^2 - c^2.$

10. $a^2+b^2+c^2=2\,ab\cos C+2ac\cos B+2\,bc\cos A.$

11. $a(\cos B\cos C+\cos A)=b\,(\cos A\cos C+\cos B)=$
$=c\,(\cos A\cos B+\cos C).$

12. $(b+c-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}=(c+a-b)\operatorname{tg}\frac{B}{2}=(a+b-c\operatorname{tg}\frac{C}{2}.$

13. $1-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{2c}{a+b+c}.$

14. $\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=\frac{2a}{b+c-a}\operatorname{ctg}\frac{A}{2}.$

15. $b\cos B+c\cos C=a\cos(B-C).$

16. $\cos A+\cos B=2.\frac{a+b}{c}.\sin^2\frac{C}{2}.$

17. $a^2\sin 2B+b^2\sin 2A=2\,ab\sin C.$

18. $\operatorname{ctg}A-\operatorname{ctg}B=(b^2-a^2):ab\sin C.$

19. $\frac{1}{a}\cos^2\frac{A}{2}+\frac{1}{b}\cos^2\frac{B}{2}+\frac{1}{c}\cos^2\frac{C}{2}=\frac{(a+b+c)^2}{4abc}.$

20. $(a+b)\cos C+(b+c)\cos A+(c+a)\cos B=a+b+c.$

21. $(a^2-b^2)\operatorname{ctg}C+(b^2-c^2)\operatorname{ctg}A+(c^2-a^2)\operatorname{ctg}B=0.$

22. $(a-b)\operatorname{ctg}\frac{C}{2}+(c-a)\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+(b-c)\operatorname{ctg}\frac{A}{2}=0.$

23. $(a+b+c)(\cos A+\cos B+\cos C)=2a\cos^2\frac{A}{2}+2\,b\cos^2\frac{B}{2}+$
$+2\,c\cos^2\frac{C}{2}.$

24. $\frac{\sin^2 A}{a^2}=\frac{\cos A\cos B}{ab}+\frac{\cos A\cos C}{ac}+\frac{\cos B\cos C}{bc}.$

25. $a\cos A+b\cos B+c\cos C=2a\sin B\sin C.$

26. $\cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{2a\sin B\sin C}{a+b+c}.$

27. $\left(\operatorname{ctg}\frac{A}{4}-\operatorname{cosec}\frac{A}{2}\right):\left(\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\right)=\frac{b+c-a}{2a}.$

28. $a^2-2ab\cos(60^0+C)=c^2-2bc\cos(60^0+A).$

29. Показать, что периметръ треугольника равенъ

$$2c\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\sec\frac{A+B}{2}.$$

30. Если $b\sin^2A+a\sin^2B=c\sin^2B+b\sin^2C=a\sin^2C+c\sin^2A$, то $a:b:c=\sin 2\,A:\sin 2\,B:\sin 2\,C.$

31. Пусть a, b и c будутъ сторонами треугольника, противолежащія угламъ 2ϑ, 3ϑ и 4ϑ; показать что $\operatorname{tg}^2\vartheta = \left(\frac{2b}{a+c}\right)^2 - 1$.

32. Если въ треугольникѣ ABC уголъ C тупой, то $\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B < 1$.

33. Если стороны a, b и c треугольника ABC составляютъ ариѳметическую прогрессію, то

$$\cos\frac{A-C}{2} = 2\sin\frac{B}{2} \text{ и } a\cos^2\frac{C}{2} + c\cos^2\frac{A}{2} = \frac{3b}{2}.$$

34. Показать, что прямая, дѣлящая уголъ треугольника пополамъ, раздѣляетъ противоположную сторону на части, обратно пропорціональныя синусамъ угловъ, прилежащихъ къ этой сторонѣ.

35. Если котангенсы угловъ треугольника составляютъ ариѳметическую прогрессію, то квадраты сторонъ треугольника будутъ также составлять ариѳметическую прогрессію.

36. Показать, что если стороны треугольника пропорціональны выраженіямъ: $gh(k^2+l^2)$, $kl(g^2+h^2)$ и $(hk+gl)(hl-gk)$, то тригонометрическія величины угловъ треугольника будутъ выраженія раціональныя.

37. Если въ треугольникѣ ABC середину стороны BC, точку D, соединимъ съ вершиною A, то, при $b > c$, $(b^2-c^2)\operatorname{tg} ADB = 2bc \sin A$.

38. Если углы A, B и C въ треугольникѣ ABC будутъ такіе, что $\operatorname{ctg}\frac{A}{2}$, $\operatorname{ctg}\frac{B}{2}$ и $\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$ составляютъ ариѳметическую прогрессію, то $\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2} = 3$.

39. Чрезъ вершины угловъ A и B въ треуг. ABC проведемъ такъ прямыя, чтобы онѣ дѣлили эти углы на части, кот. синусы были въ отношеніи 1 къ n; эти прямыя пересѣкутся, положимъ, въ точкѣ D. Показать, что прямая CD дѣлитъ уголъ C на части въ отношеніи 1 къ n^2.

40. Пусть l означаетъ длину равнодѣлящей угла A въ треугольникѣ ABC (ограниченной противулежащею стороною) и ϑ уголъ, который составляетъ равнодѣлящая съ основаніемъ треугольника. Показать, что периметръ треугольника равенъ

$$2l\cos\tfrac{1}{2}A\sin\vartheta : \left(\sin\vartheta - \sin\tfrac{1}{2}A\right).$$

41. Раздѣлимъ основаніе треугольника на три равныя части и точки дѣленія соединимъ съ противоположною вершиною; тогда уголъ при вершинѣ раздѣлится на три части, которыхъ тангенсы, положимъ, будутъ: t_1, t_2 и t_3. Показать, что

$$\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}\right)\left(\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}\right)=4\left(1+\frac{1}{t_2^{\,2}}\right).$$

42. Если синусы угловъ треугольника будутъ составлять ариѳметическую прогрессію, то произведеніе тангенса половины большаго угла на тангенсъ половины меньшаго равно $\frac{1}{3}$.

43. Если ϑ будетъ бо̀льшій изъ угловъ треугольника, а φ — меньшій и стороны треугольника составляютъ ариѳметическую прогрессію, то

$$4(1-\cos\vartheta)\,(1-\cos\varphi)=\cos\vartheta+\cos\varphi.$$

44. Показать, что въ треугольникѣ ABC,

$$a^2.\frac{\cos\frac{1}{2}(B-C)}{\cos\frac{1}{2}(B+C)}+b^2.\frac{\cos\frac{1}{2}(C-A)}{\cos\frac{1}{2}(C+A)}+c^2.\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}=$$
$$=2\,(ab+bc+ac).$$

Задачи на IX отдѣлъ.

I. Задачи на рѣшеніе треугольниковъ по семизначнымъ таблицамъ логариѳмовъ.

Рѣшить прямоугольный треугольникъ по гипотенузѣ и острому углу:

1. $c=38$; $A=48^0 39'$. **2.** $c=100$; $A=17^0 29' 36''$.
3. $c=480$; $B=30^0 48'',4$. **4.** $c=57,28$; $A=39^0 19' 17'',6$.
5. $c=4,5486$; $A=24^0 44' 46'',5$.
6. $c=0,000564$; $B=60^0 51' 28'',19$.
7. $c=0,0848675$; $A=29^0 9' 51'',38$.
8. $c=396288$; $B=56^0 30' 9'',47$.
9. $c=0,6947867$; $B=6^0 48' 25'',24$.
10. $c=2\frac{7}{9}$; $B=38^0 17' 27'',44$.

Рѣшить прямоугольный треугольникъ по гипотенузѣ и катету:

11. $c=100$; $a=57$. **12.** $c=6849$; $a=4569$.
13. $c=1,45$; $b=0,478$. **14.** $c=12$; $b=4,92$.
15. $c=50,6$; $b=47,8126$. **16.** $c=0,0014$; $a=0,000847$.
17. $c=121478$; $a=56948$. **18.** $c=1$; $b=0,0142768$.

19. $c=0,949672$; $b=0,8$. **20.** $c=1,248$; $a=0,5648786$.
21. $c=30$; $a=29$ *). **22.** $c=0,5$; $b=0,48987$.
23. $c=17$; $a=16,854$. **24.** $c=0,08$; $b=0,0792486$.

Рѣшить прямоугольный треугольникъ по катету и острому углу:

25. $a=75$; $A=24^0 24' 30''$. **26.** $a=396$; $B=49^0 42''$.
27. $b=1000$; $B=61^0 50' 27'',8$. **28.** $b=1,4$; $A=58^0 6' 8'',64$.
29. $a=0,001$; $A=8^0 17' 12'',08$.
30. $a=0,84217$; $B=34^0 47' 44'',26$.
31. $b=0,0921719$; $B=10^0 34' 47'',37$.
32. $b=426878$; $A=19^0 8'',84$.
33. $a=54,5267$; $A=36^0 54' 7'',84$.
34. $b=0,5718196$; $B=80^0 35' 52'',07$.

Рѣшить прямоугольный треугольникъ по катетамъ:

35. $a=62$; $b=87$. **36.** $a=15$; $b=10,7$.
37. $a=0,0487$; $b=0,145$. **38.** $a=3$; $b=2,08286$.
39. $a=5468$; $b=148627$. **40.** $a=0,28$; $b=0,982876$.
41. $a=1,2$; $b=4,000728$. **42.** $a=0,0864767$; $b=0,16$.
43. $a=10,24625$; $b=9,964$. **44.** $a=0,0084$; $b=0,0282473$.

Рѣшить прямоуг. треугольникъ безъ помощи логариѳмовъ:

45. $A=45^0$; $b=4,5$. **46.** $B=60^0$; $a=10$.
47. $A=30^0$; $c=0,56$. **48.** $b=6$; $c=12$.
49. $a=4$; $B=22^0 30'$. **50.** $c=10$; $A=15^0$.
51. $a=2$; $b=\sqrt{12}$.

Рѣшить равнобедренный треугольникъ, въ которомъ b основаніе, а h — высота:

52. $a=14,268$; $A=67^0 28' 24''$.
53. $a=1,56894$; $C=38^0 39' 40'',6$.
54. $a=0,246873$; $B=46^0 3' 26'',18$.
55. $b=0,47$; $A=29^0 59' 27'',7$.
56. $b=1,30864$; $A=10^0 26' 56'',96$.
57. $b=175,187$; $B=30^0 15' 14'',72$.
58. $a=0,961918$; $b=0,75$. **59.** $a=1,24$; $b=2,087695$.
60. $a=0,0496$; $h=0,0184968$. **61.** $b=15,6428$; $h=4,96$.
62. $h=0,948659$; $A=35^0 35' 28'',45$.

---

*) 21, 22, 23 и 24 зад. надо рѣшить по формулѣ § 127.

63. $h = 1126,784$; $B = 52^0 53' 59'',06$.

64. $a = 25$; $B = 48^0 59'$; $C = 62^0 16' 45''$.

Рѣшить треугольникъ по сторонѣ и двумъ угламъ:

65. $a = 2,65$; $B = 48^0 49' 16''$; $C = 20^0 35' 14''$.

66. $c = 0,068348$, $A = 100^0$; $B = 68^0 43' 7'',86$.

67. $a = 10,4593$; $B = 60^0 16'$; $C = 32^0 25' 39'',7$.

68. $b = 0,854968$; $A = 100^0 28' 35'',8$; $C = 60^0 26''$.

69. $b = 1,21488$; $B = 47^0 19'$; $C = 20^0 56'',26$.

70. $a = 45,0086$; $B = 16^0 14'',85$; $C = 23^0 51' 47'',6$.

71. $c = 3,490068$; $B = 35^0 29' 34'',8$; $C = 50^0 58'$.

72. $b = 1,596846$; $A = 37' 36'',9$; $B = 25^0 42'',1$.

73. $a = 8125,756$; $A = 97^0 26' 26'',3$; $B = 42^0 39' 0'',7$.

Рѣшить треугольникъ по двумъ сторонамъ и углу между ними:

74. $a = 10$; $b = 8$; $C = 29^0 37' 24''$.

75. $a = 345$; $b = 120$; $C = 48^0 45' 23'',86$.

76. $a = 1,85$; $c = 2,6$; $B = 43^0 56' 38''$.

77. $a = 1,4268$; $b = 1,4249$; $C = 151^0 47' 53'',06$.

78. $b = 8$, $c = 10,705$; $A = 68^0 53' 45'',5$.

79. $b = 0,75$; $a = 0,68039$; $C = 7^0 17' 36'',6$.

80. $a = 12,85$; $c = 7,96947$; $B = 92^0 4' 57'',8$.

81. $a = 0,456948$; $b = 1$; $C = 148^0 28'',4$.

82. $b = 56,75$; $c = 40,6586$; $A = 50^0 45''$.

83. $c = 0,06756$; $a = 8,96$; $B = 67^0 18' 17'',3$.

Рѣшить треугольникъ по тремъ сторонамъ:

84. $a = 47$; $b = 31$; $c = 20$.

85. $a = 450$; $b = 300$; $c = 310$.

86. $a = 25$; $b = 38$; $c = 40,796$.

87. $a = 1000$; $b = 1248$; $c = 2082$.

88. $a = 0,66$; $b = 0,47569$; $c = 0,3$.

89. $a = 0,96$; $b = 2,5$; $c = 1,8535$.

90. $a = 3,472$; $b = 2,8$; $c = 3,00836$.

91. $a = 0,4567$, $b = 1$; $c = 0,970086$.

92. $a = 127,85$; $b = 168,459$; $c = 50$.

93. $a = 2\frac{11}{12}$; $b = 4,8$; $b = 3,95678$.

94. $a = 10$; $b = 12,756$; $c = 11,4737$.

95. $a = 5,1659$, $b = 7,813$; $c = 9,40008$.

96. $a = 34,7$; $b = 17$; $c = 60$.

97. $a = 0{,}45$; $b = 1$; $c = 0{,}15$.

98. $a = \sqrt{5}$; $b = \sqrt{13}$; $c = \sqrt{2}$.

99. $a = \sqrt{3}$; $b = 2$; $c = \sqrt{5}$.

Рѣшить треугольникъ по двумъ сторонамъ и углу, противолежащему одной изъ нихъ:

100. $a = 486$; $b = 812$; $B = 21^0 35' 48'',4$.

101. $a = 1{,}86$; $b = 1{,}754$; $A = 47^0 12' 18''$.

102. $a = 13{,}5$; $c = 8{,}00627$; $A = 58^0 42' 16'',8$.

103. $b = 1$; $c = 1{,}408508$; $C = 148^0 28'',4$.

104. $a = 345$; $c = 280{,}7817$; $A = 112^0 29' 55'',06$.

105. $a = 126{,}759$; $c = 40{,}16607$; $A = 123^0 40' 38'',16$.

106. $a = 0{,}1310983$; $b = 0{,}1$; $c = 80^0 22' 7'',15$.

107. $a = 352$; $b = 300$; $B = 25^0 26' 47'',8$.

108. $a = 9{,}7068$; $b = 8{,}64$; $B = 38^0 14' 29'',17$.

109. $a = 198{,}3708$; $c = 268{,}84$; $A = 24^0 23' 44'',28$.

110. $a = 134{,}17$; $b = 82{,}51$; $B = 52^0 19' 18'',4$.

111. $c = 40{,}6584$; $b = 57$; $c = 45^0 48' 30'',6$.

112. $a = 0{,}28$; $b = 1{,}35$; $A = 16^0 18' 17''$.

Рѣшить треугольникъ, безъ помощи логариѳмовъ, когда дано:

113. $b = 30$; $A = 30^0$; $C = 105^0$.

114. $a = 12{,}8$; $A = 45^0$; $B = 60^0$.

115. $a = 10$; $A = 32^0 30'$; $B = 60^0$; найти b.

116. $a = 8$; $b = 16$; $C = 60^0$. **117.** $c = 3$, $b = 3\sqrt{2}$; $A = 45^0$.

118. $c = \sqrt{3} - 1$; $b = 2$; $c = 135^0$.

119. $a = 8$; $c = 4\sqrt{6}$; $B = 15^0$.

120. $a = 2$; $b = 1 + \sqrt{3}$; $c = \sqrt{6}$.

121. $a = 2\sqrt{3}$; $b = 3 - \sqrt{3}$; $c = 3\sqrt{2}$.

122. По сторонѣ a и углу α ромба, опредѣлить его діагонали. $a = 1864$ арш. и $\alpha = 40^0 13' 51'',7$.

123. По діагонали d и углу α между діагоналями прямоугольника, найти его стороны и площадь. $d = 0{,}756$ и $\alpha = 41^0 47,'' 8$.

124. Уголъ при вершинѣ равносторонняго треугольника раздѣленъ на три равныя части, отчего противоположный бокъ a раздѣлился тоже на три части. Найти эти части. $a = 1000$.

125. По радіусу r круга и центральному углу α, вычислить соотвѣтствующую углу хорду и разстояніе этой хорды до центра круга. $r = 125$ и $\alpha = 101^0 47' 29'',5$.

126. По центральному углу α и соотвѣтствующей ему хордѣ a, опредѣлить радіусъ этого круга. $\alpha = 85^0 35' 45'',7$ и $a = 42,9276$.

127. Изъ точки, отстоящей отъ центра круга на a, этотъ кругъ видѣнъ подъ угломъ α. Найти радіусъ круга. $a = 0,489686$ и $\alpha = 124^0 13' 17'',7$.

128. Въ кругѣ радіуса r проведена хорда a. Вычислить уголъ между касательными, проведенными къ кругу чрезъ концы хорды. $r = 10,3$, $a = 6,24967$.

129. Въ кругѣ, хорда $AB = 5,275$ метра, а хорда AC, стягивающая дугу, вдвое большую AB, равна 4,12 метра. Найти радіусъ этого круга съ точностью до одного миллиметра.

130. Какой долженъ быть радіусъ круга, чтобы разность между его дугою въ 80^0 и соотвѣтствующею ей хордою была бы менѣе 0,001 саж.

131. Разстояніе между центрами двухъ круговъ радіусовъ R и r равно a. Найти уголъ, составлен. внѣшними касательными и уголъ составленный внутренними касательными къ этимъ кругамъ.

132. Площадь квадрата, построеннаго на гипотенузѣ въ $m = 145$ разъ болѣе площади квадрата, построеннаго на одномъ изъ катетовъ. Найти углы треугольника.

133. Данъ уголъ A; изъ точки, взятой на одной изъ сторонъ, опустимъ перпендикуляръ на другую сторону; изъ основанія этого перпендикуляра опустимъ перпендикуляръ на первую сторону; изъ основанія этого перпендикуляра опустимъ перпендикуляръ на вторую сторону и т. д. Опредѣлить сумму этихъ перпендикуляровъ, когда длина перваго изъ нихъ есть a.

134. Опредѣлить радіусъ параллельнаго круга земнаго шара, находящагося подъ широтою φ. $R = 858$ геогр. миль, $\varphi = 24^0 25'$.

135. На какой широтѣ градусъ параллельнаго круга равенъ a. R, т. е. рад. земли, $= 6377,4$ километра, $a = 100$ километр..

136. Два мѣста A и B лежатъ подъ φ^0 южной широты и имѣютъ a^0 и b^0 восточной долготы. Найти разстояніе между A и B.

137. Пусть s и v означаютъ поверхность и объемъ конуса; h — высоту; r — радіусъ основанія; l — образующую; α уголъ наклоненія образующей къ основанію и 2β уголъ при вершинѣ. Найти v и s, когда дано: I) r и α; II) h и α и III) a и β.

138. Опредѣлить видимую часть поверхности шара, подъ угломъ 2α, изъ точки, отстоящей отъ центра шара на a.

139. Опредѣлить поверхность земнаго пояса, лежащаго между сѣверными широтами φ и φ', полагая $R = 858$ геогр. мил., $\varphi = 38^0$ и $\varphi' = 20^0 15'$.

140. Опредѣлить объемъ отъ обращенія сектора AOB около радіуса $OA = R$, когда центральный уголъ $AOB = \alpha$. $R = 3$ футамъ и $\alpha = 23^0 37'$.

Рѣшить прямоугольный треугольникъ (141—148):

141. По суммѣ s катета съ гипотенузою и острому углу A.

142. По гипотенузѣ c и разности d катетовъ.

143. По гипотенузѣ c и суммѣ s катетовъ.

144. По острому углу A и суммѣ s или разности d катетовъ.

145. По периметру $2p$ и острому углу A.

146. По острому углу A и разности d между суммою катетовъ и гипотенузою.

147. По суммѣ s катетовъ и радіусу r вписаннаго круга.

148. По радіусу r вписаннаго круга и острому углу A.

149. Найти радіусъ вписаннаго круга въ прямоугольный треугольникъ, когда дано: I) катетъ a и уголъ A и II) гипотенуза c и уголъ A.

150. Въ параллелограмѣ дана діагональ d и углы φ и ψ, составляемые ею съ боками параллелограмма. Найти его стороны. $d = 15{,}6249$, $\varphi = 62^0 17'$ и $\psi = 24^0 45' 36'',4$.

151. Въ трапеціи даны основанія: $a = 1{,}02458$ и $b = 0{,}567$; одна изъ непараллельныхъ сторонъ $c = 1{,}2$ и уголъ $\varphi = 36^0\, 27'\, 23'',5$ между a и c. Вычислить: остальную сторону и другой уголъ при основаніи a.

152. Найти діагонали параллелограмма, въ кот. даны двѣ стороны: $a = 8{,}42625$, $b = 5{,}46$ и уголъ $\alpha = 32^0 33' 37'',8$ между ними.

153. Въ равнобочной трапеціи дано: основаніе $a = 0{,}926$, прилежащій къ нему уголъ $\alpha = 83^0 5' 16'',4$ и діагональ $d = 1{,}3$. Найти остальныя части.

154. По двумъ діагоналямъ $d = 1{,}056$ и $d' = 1{,}28$, и сторонѣ $a = 0{,}4$ параллелограма, вычислить уголъ между діагоналями.

155. Даны три круга, касающіеся попарно. Найти углы, составляемые линіями центровъ, если радіусы круговъ: r, r' и r''.

156. Въ кругѣ радіуса r проведена хорда $AB = a$, кот. продолжена на $BC = b$. Изъ точки C проведемъ сѣкущую CXY къ кругу

такъ, чтобы большая дуга AY была вдвое болѣе меньшей BX. Найти уголъ ACY.

157. Сѣкущая и касательная къ кругу составляютъ уголъ α; внѣшній отрѣзокъ сѣкущей равенъ b, а внутренній равенъ a. Найти радіусъ окружности и длину хорды, соединяющей точку касанія съ концомъ сѣкущей.

158. Въ четыреугольникѣ $ABCD$ даны діагонали: $AC = 8$ и $BD = 10$; сторона $b = 6{,}40314$; углы: $BCD = 88^0 51' 13'',9$ и $CDA = 60^0 27' 39'',2$. Найти остальныя части четыреугольника.

Рѣшить косоугольный треугольникъ, когда дано (159 — 178):

159. $a + b = s$, c и C. **160.** $a - b = d$, c и C.

161. $a + b = s$, A и C. **162.** $a - b = d$, A и B.

163. a, b и m_c — длина равнодѣлящей угла C.

164. A, B и m_a — длина равнодѣлящей угла A.

165. $a + b = s$, c и A. **166.** $a - b = d$, c и A.

167. $a + b = s$, c и $A - B = \delta$. **168.** $a - b = d$, c и $A - B = \delta$.

169. $a + b + c = 2p$, A и B. **170.** $a + b - c = d$, A и B.

171. $a + b + c = 2p$, h и A. **172.** $h_c - h_a = d$, A и C*).

173. $h_a + h_c = s$, b и B. **174.** h_a, h_b и h_c.

175. $b + c = s$, h_a и A. **176.** $b - c = d$, a и h.

177. a, h_a и $B - C = \delta$. **178.** A, $a + b = s$ и $a + c = t$.

179. Показать, что длина перпендикуляра, опущеннаго изъ вершины C въ треугольникѣ ABC на противоположную сторону, равна

$$\frac{ab}{2} \cdot \frac{a \sin A + b \sin B + c \sin C}{ab \cos A + ac \cos B + bc \cos A}.$$

180. Опредѣлить поверхность и объемъ параллелепипеда, въ кот. даны три смежныя ребра a, b и c и три угла между ними: $\angle(ab) = \alpha$, $\angle(ac) = \beta$ и $\angle(bc) = \gamma$.

II. Задачи на рѣшеніе треугольниковъ по пятизначнымъ таблицамъ логариѳмовъ.

Рѣшить прямоугольный треугольникъ по гипотенузѣ и острому углу:

181. $c = 38$; $A = 48^0 39'$. **182.** $c = 100$; $A = 17^0 29' 36''$.

183. $c = 480$; $B = 30^0 48''$. **184.** $c = 57{,}28$; $A = 39^0 17' 18''$.

*) h_a означаетъ высоту треугольника, опущенную на сторону a.

185. $c = 4{,}5486$; $A = 24^0 44' 47''$.

186. $c = 0{,}000564$; $B = 60^0 51' 28''$.

187. $c = 0{,}084868$; $A = 29^0 9' 51''$.

188. $c = 396288$; $B = 56^0 30' 9''$.

189. $c = 0{,}69479$; $B = 6^0 48' 25''$.

190. $c = 2\frac{7}{9}$; $B = 38^0 17' 27''$.

Рѣшить прямоугольный треугольникъ по гипотенузѣ и катету:

191. $c = 100$; $a = 57$.
192. $c = 12$; $b = 4{,}92$.
193. $c = 1{,}45$; $b = 0{,}478$.
194. $c = 6849$; $a = 4569$.
195. $c = 50{,}6$; $b = 47{,}8126$.
196. $c = 0{,}0014$; $a = 0{,}000847$.
197. $c = 121478$; $a = 56948$.
198. $c = 1$; $a = 0{,}0142768$.
199. $c = 0{,}94967$; $b = 0{,}8$.
200. $c = 1{,}248$; $a = 0{,}56488$.
201. $c = 30$; $a = 29$ *).
202. $c = 0{,}5$; $b = 0{,}48987$.
203. $c = 17$; $a = 16{,}854$.
204. $c = 0{,}08$; $b = 0{,}079249$.

Рѣшить прямоугольный треугольникъ по катету и острому углу:

205. $a = 75$; $A = 24^0 24' 30''$.
206. $a = 396$; $B = 49^0 42''$.
207. $b = 1000$; $B = 61^0 50' 28''$.
208. $b = 1{,}4$; $A = 58^0 6' 23''$.

209. $a = 0{,}001$; $A = 8^0 17' 12''$.

210. $a = 0{,}84217$; $B = 34^0 47' 44''$.

211. $b = 0{,}092172$; $B = 10^0 34' 47''$.

212. $b = 426878$; $A = 19^0 9''$.

213. $a = 54{,}527$; $A = 36^0 54' 32''$.

214. $b = 0{,}57182$; $B = 80^0 35' 52''$.

Рѣшить прямоугольный треугольникъ по катетамъ:

215. $a = 62$; $b = 87$.
216. $a = 15$; $b = 10{,}7$.
217. $a = 0{,}0487$; $b = 0{,}145$.
218. $a = 3$; $b = 2{,}08286$.
219. $a = 5468$; $b = 148627$.
220. $a = 0{,}28$; $b = 0{,}982876$.
221. $a = 1{,}2$; $b = 4{,}00073$.
222. $a = 0{,}086477$; $b = 0{,}16$.
223. $a = 10{,}246$; $b = 9{,}964$.
224. $a = 0{,}0084$; $b = 0{,}028247$.

Рѣшить равнобедренный треугольникъ, въ кот. b — основаніе и h — высота:

225. $a = 14{,}268$; $A = 67^0 28' 24''$.
226. $a = 1{,}5689$; $C = 38^0 39' 41''$.
227. $c = 0{,}24687$; $B = 46^0 3' 26''$.
228. $b = 0{,}47$; $A = 29^0 59' 28''$.
229. $b = 43{,}848$; $B = 41^0 45' 28''$.
230. $a = 0{,}96192$; $b = 0{,}75$.
231. $a = 0{,}0496$; $h = 0{,}0184968$.
232. $b = 15{,}6428$; $h = 4{,}96$.
233. $h = 0{,}94866$; $A = 35^0 35' 28''$.
234. $h = 1126{,}78$; $B = 52^0 53' 59''$.

*) 201—204 зад. надо рѣшить по формулѣ § 127.

Рѣшить треугольникъ по сторонѣ и двумъ угламъ:

235. $b = 0{,}1$; $B = 48^0 46'$; $C = 50^0 51' 52''$.

236. $a = 2{,}65$; $B = 48^0 49' 16''$; $C = 20^0 35' 14''$.

237. $c = 0{,}068348$; $A = 100^0$; $B = 68^0 43' 8''$.

238. $a = 10{,}459$; $B = 60^0 16'$; $C = 32^0 25' 39''$.

239. $b = 0{,}854968$; $A = 100^0 28' 36''$; $C = 60^0 26''$.

240. $a = 206{,}75$; $A = 87^0 6' 58''$; $B = 45^0 17' 8''$.

241. $a = 45{,}009$; $B = 16^0 15''$; $C = 23^0 51' 48''$.

242. $c = 3{,}49007$; $B = 35^0 29' 35''$; $C = 50^0 58'$.

243. $b = 1{,}5968$; $A = 37^0 37''$; $B = 25^0 42''$.

244. $a = 8125{,}76$; $A = 97^0 26' 26''$; $B = 42^0 39' 1''$.

Рѣшить треугольникъ по двумъ сторонамъ и углу между ними:

245. $a = 10$; $b = 8$; $C = 29^0 37' 24''$.

246. $a = 345$; $b = 120$; $C = 48^0 45' 24''$.

247. $a = 50$; $b = 45$; $C = 113^0 51' 36''$.

248. $a = 1{,}85$; $c = 2{,}6$; $B = 43^0 56' 38''$.

249. $b = 8$; $c = 10{,}705$; $A = 68^0 53' 45''$.

250. $b = 0{,}75$; $a = 0{,}68039$; $C = 7^0 17' 36''$.

251. $a = 12{,}85$; $c = 7{,}9695$; $B = 92^0 4' 58''$.

252. $a = 0{,}45695$; $b = 1$; $C = 148^0 28''$.

253. $b = 56{,}75$; $c = 40{,}6586$; $A = 50^0 45''$.

254. $a = 8{,}96$; $c = 0{,}06756$; $B = 67^0 18' 18''$.

Рѣшить треугольникъ по тремъ сторонамъ:

255. $a = 47$; $b = 31$; $c = 20$. **256.** $a = 450$; $b = 300$; $c = 310$.

257. $a = 25$; $b = 38$; $c = 40{,}796$.

258. $a = 0{,}03$; $b = 0{,}04$; $c = 0{,}0247$.

259. $a = 0{,}96$; $b = 2{,}5$; $c = 1{,}8536$.

260. $a = 0{,}47$; $b = 0{,}625$; $c = 0{,}51786$.

261. $a = 1000$; $b = 1248$; $c = 2082$.

262. $a = 3{,}472$; $b = 2{,}8$; $c = 3{,}00836$.

263. $a = 2\frac{11}{12}$; $b = 4{,}8$; $c = 3{,}95677$.

264. $a = 34{,}7$; $b = 17{,}24$; $c = 60{,}8$.

Рѣшить треугольникъ по двумъ сторонамъ и углу, противолежащему одной изъ нихъ:

265. $a = 13{,}5$; $c = 8$; $A = 58^0 42' 17''$.

266. $a = 0{,}131$; $b = 0{,}1$; $A = 80^0 22' 7''$.

267. $a = 1{,}86$; $b = 1{,}754$; $A = 47^0 12' 18''$.

268. $b=1$; $c=1{,}4085$; $C=148^0 28''$.

269. $a=345$; $c=280{,}78$; $A=112^0 29' 55''$.

270. $a=9{,}7$; $b=8{,}64$; $B=38^0 14' 29''$.

271. $a=352$; $b=300$; $B=25^0 26' 48''$.

272. $a=198{,}37$; $c=268{,}84$; $A=24^0 23' 44''$.

273. $a=134$; $b=82{,}51$; $B=52^0 19' 18''$.

274. $a=2148$; $c=984{,}9$; $C=45^0 25' 16''$.

Задачи на X отдѣлъ.

1. Башня въ $a=34{,}5$ метра бросаетъ тѣнь въ $b=41$ метръ. Опредѣлить высоту солнца.

2. Солнце находится на высотѣ $\alpha=56^0 40'$ надъ горизонтомъ. Какой длины тѣнь отъ дерева, вышиною $h=15$ саж.?

3. Маякъ, вышиною въ 98 футъ, видѣнъ съ корабля подъ угломъ въ $4^0 25' 48''$. Опред. разстояніе корабля до маяка, полагая, что глазъ наблюдателя и основаніе маяка въ одной горизонтальной плоскости.

4. Рѣшить задачу § 149, когда $b=445$ ф., $A=42^0$ и $C=60^0 28'$.

5. Рѣшить задачу § 149, когда $b=312{,}72$ саж., $A=50^0 46' 38''$ и $C=29^0 24'$.

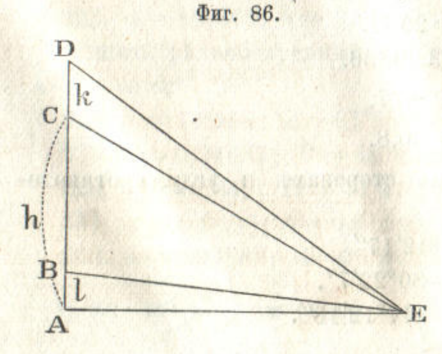
6. Рѣшить задачу § 149, когда $b=250$ футъ, $\angle ACB=41^0$, $\angle BCD=15^0 16'$, $\angle BDA=50^0$ и $\angle ADC=10^0 20'$.

7. Рѣшить задачу § 149, когда $b=160$ саж., $\angle ACD=82^0 17' 30''$, $\angle BCD=23^0 29' 30''$, $\angle BDA=42^0$ и $\angle ADC=60^0 46'$.

8. Рѣшить задачу § 150, когда $a=220$ саж., $c=150$ саж., $\alpha=12^0 18'$, $\beta=10^0$ и $\gamma=125^0$.

9. Рѣшить задачу § 150, когда $AB=400$ фут., $BC=348$ фут., $AC=624$ фут., $\alpha=20^0 34'$ и $\beta=28^0 25'$.

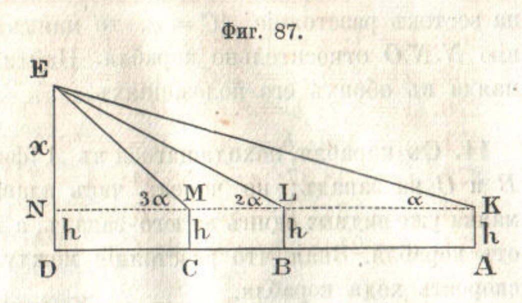
Фиг. 86.



10. На берегу рѣки возвышается колонна, на кот. находится статуя. Наблюдатель, находящ. на противоположномъ берегу, видитъ подъ однимъ и тѣмъ же угломъ статую и часоваго, стоящаго у подножія колонны. Найти ширину рѣки, если высота колонны, статуи и часоваго суть: h, k и l.

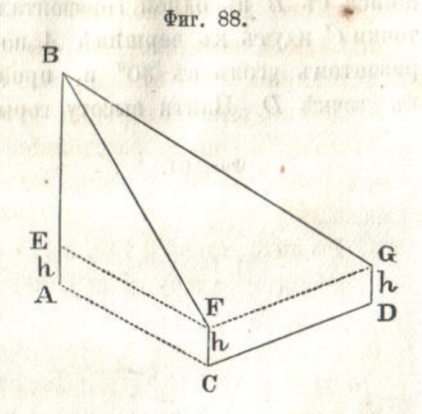
11. Послѣдовательно изъ трехъ точекъ A, B и C, по направленію къ башнѣ DE, опредѣляютъ угловую высоту этой башни Найти высоту башни, когда $AB=a$, $BC=b$; угловая высота въ точкѣ B вдвое болѣе угловой высоты въ A, а угловая высота въ точкѣ C втрое болѣе, чѣмъ въ A (h высота инструмента).

Фиг. 87.



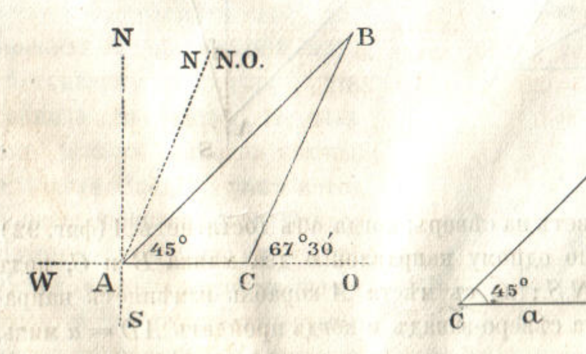
12. Чтобы измѣрить высоту горы AB, гдѣ B ея вершина, выбираютъ двѣ точки C и D приблизительно въ одной горизонтальной плоскости съ A. Измѣряютъ разстояніе $CD=b$ и угловую высоту горы, т. е. $\angle BFE=\alpha$; также измѣряютъ углы $BFG=\beta$ и $BGF=\gamma$. Найти высоту горы (h высота инструмента $=4{,}5$ ф.) $b=1548$ футъ, $\alpha=42^{0}28'$, $\beta==100^{0}34'$, $\gamma=51^{0}$.

Фиг. 88.

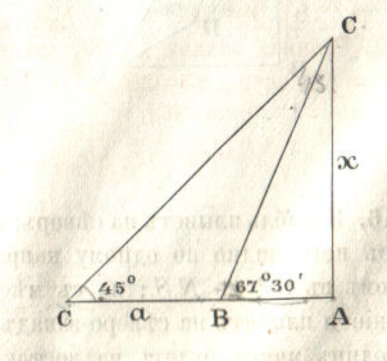


13. Направленіе маяка B (фиг. 89) относительно корабля, находящагося въ A, было сначала $N.\ O.$*); но когда корабль прошелъ

Фиг. 89.



Фиг. 90.



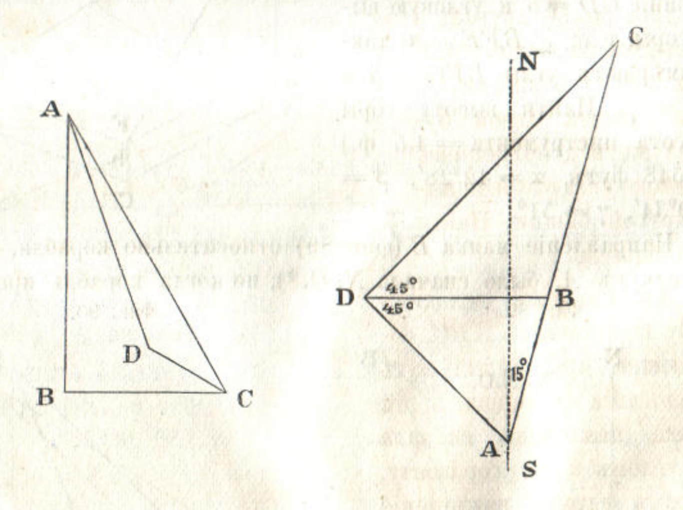
*) Сѣверо-востокъ.

на востокъ разстояніе $AC = a$, то маякъ былъ уже по направленію $N.N.O$ относительно корабля. Найти разстояніе корабля отъ маяка въ обоихъ его положеніяхъ.

14. Съ корабля, находящагося въ A (фиг. 90), видятъ два маяка B и C на западъ; но черезъ часъ плаванія къ сѣверу, оба эти маяка уже видны: одинъ на юго-западъ, а другой на юго-юго-западъ отъ корабля. Зная, что разстояніе между маяками равно a, найти скорость хода корабля.

15. Угловая высота горы AB (фиг. 91) въ точкѣ C, находящейся съ B въ одной горизонтальной плоскости, равна 60^0. Изъ точки C идутъ къ вершинѣ A по тропинкѣ, составляющей съ горизонтомъ уголъ въ 30^0 и, пройдя километръ, останавливаются въ точкѣ D. Найти высоту горы, если $\angle ADC = 135^0$.

Фиг. 91. Фигъ. 92.



16. Корабль плыветъ на сѣверъ; когда онъ достигнетъ A (фиг. 92), то съ него видно по одному направленію два маяка B и C, подъ угломъ въ 15^0 къ $N.S.$; но съ мѣста A корабль измѣняетъ направленіе и плыветъ на сѣверо-западъ и когда пройдетъ $AD = a$ миль, то одинъ маякъ будетъ на востокѣ, а другой на сѣверо-востокѣ относительно корабля. Найти разстояніе между маяками B и C.

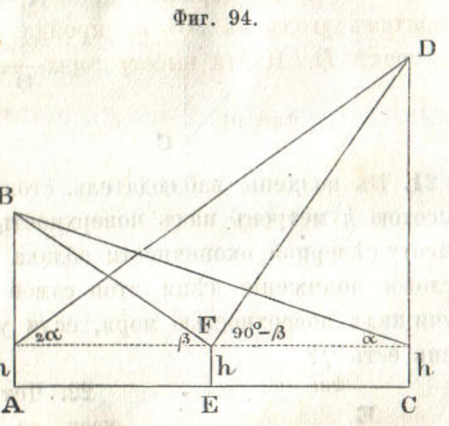
17. Наблюдатель, стоящій въ C на сѣверъ башни AB, опредѣляетъ α ея угловую высоту; потомъ съ этого мѣста, идетъ на востокъ и, пройдя растояніе b отъ перваго мѣста, останавливается въ D; въ этомъ мѣстѣ онъ также опредѣляетъ β угловуювысоту башни. Найти разстояніе отъ башни до перваго мѣста и высоту башни.

Фиг. 93.



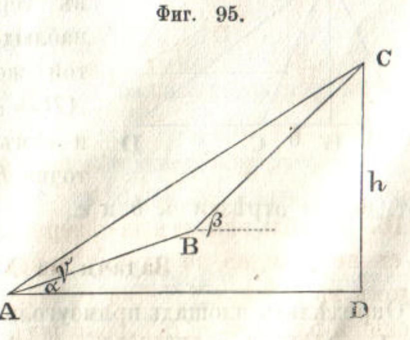
18. На горизонтальной поверхности стоятъ двѣ башни: AB и CD въ разстояніи a. Если станемъ по очередно у подошвы каждой изъ нихъ, то найдемъ, что угловая высота одной будетъ вдвое болѣе другой; а если станемъ на рединѣ разстоянія между башнями, то угловая высота одной будетъ служить дополненіемъ до прямаго угла угловой высотѣ другой башни. Найти высоты башень.

Фиг. 94.



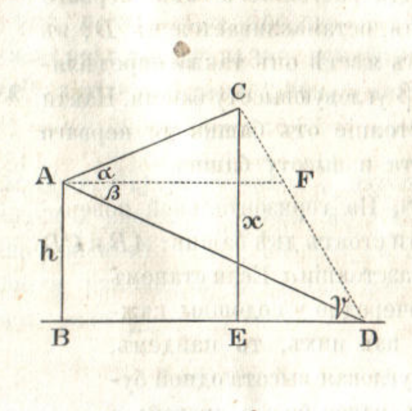
19. Наблюдатель, всходитъ на гору по тропинкѣ ABC, составляющей кратчайшій путь отъ основанія къ вершинѣ; эта тропинка наклонена сначала подъ угломъ α къ горизонту, но потомъ вдругъ наклоненіе ея увеличивается и равно β. Высота h горы была уже опредѣлена ранѣе помощію барометра, а угловая высота горы для мѣста A, откуда наблюдатель сталъ подниматься, есть γ. Найти длину тропинки.

Фиг. 95.



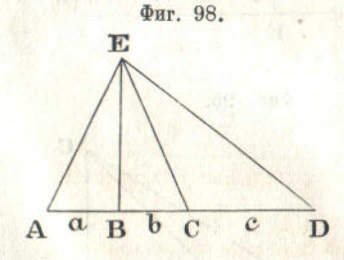
20. Наблюдатель, стоящій въ F (фиг. 96) на берегу озера, опредѣляетъ α угловую высоту тучи и β угловое пониженіе отраженія тучи въ озерѣ. Если h будетъ высота глаза надъ поверхностью озера, то какая высота тучи отъ поверхности озера?

Фиг. 96. Фиг. 97.



21. Въ полдень, наблюдатель, стоящій на скалѣ въ A (фиг. 97), высотою h метровъ надъ поверхностью моря, находитъ α угловую высоту сѣверной оконечности облака въ плоскости меридіана и β угловое пониженіе тѣни этой самой оконечности. Какая высота тучи надъ поверхностью моря, если угловая высота солнца въ полдень есть γ?

Фиг. 98.



22. Четыре точки A, B, C и D лежатъ на одной прямой, находящейся въ горизонтальной плоскости. Глазъ наблюдателя, помѣщенный въ точкѣ E той же плоскости, видитъ отрѣзки: $AB = a$, $BC = b$ и $CD = c$ подъ однимъ и тѣмъ же угломъ. Найти разстояніе точки E до A, B, C и D, и уголъ, подъ кот. видны отрѣзки a, b и c.

Задачи на XI Отдѣлъ.

Опредѣлить площадь прямоугольнаго треугольника, когда дано *):

1. $c = 8$; $A = 57^0 42' 36''$. **2.** $a = 0{,}234786$; $A = 23^0 48'',09$.

*) c — гипотенуза; a и b катеты.

3. $b = 4{,}72689$; $A = 58^\circ 47' 30'',28$.

Опредѣлить площадь треугольника, когда дано:

4. $a = 0{,}456948$; $b = 1$; $C = 148^\circ 28'',4$.

5. $b = 56{,}75$; $c = 40{,}6586$; $A = 50^\circ 45''$.

6. $a = 8{,}96$; $c = 0{,}06756$; $B = 67^\circ 18' 17'',3$.

7. $a = 45{,}0086$; $B = 16^\circ 14'',85$; $C = 23^\circ 51' 47'',6$.

8. $b = 1{,}596846$; $A = 37^\circ 36'',9$; $B = 25^\circ 42'',1$.

9. $a = 206{,}7549$; $A = 87^\circ 6' 58'',28$; $B = 45^\circ 17' 8''$.

10. $a = 13{,}5$; $c = 8{,}00627$; $A = 58^\circ 42' 16'',8$.

11. $b = 1$; $c = 1{,}408508$; $C = 148^\circ 28'',4$.

12. $a = 0{,}6$; $b = 2{,}7028$; $A = 26^\circ 35' 47''$.

13. $a = 0{,}96$; $b = 2{,}5$; $c = 1{,}8535$.

14. $a = 10$; $b = 12{,}756$; $c = 11{,}4737$.

15. $a = 0{,}66$; $b = 0{,}47569$; $c = 0{,}3$.

16. $h = 1{,}8$; $A = 25^\circ 19'$; $B = 38^\circ 20' 35''$.

Показать, въ задачахъ отъ 17 до 25, что площадь треугольника равна:

17. $\frac{1}{4}(a^2 \sin 2B + b^2 \sin 2A)$.

18. $\frac{a^2 - b^2}{2} \cdot \frac{\sin A \sin B}{\sin (A - B)}$.

19. $p(p - a) \operatorname{tg} \frac{A}{2}$.

20. $(p - b)(p - c) \operatorname{ctg} \frac{A}{2}$.

21. $\frac{2abc}{a + b + c} \cdot \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$.

22. $\frac{abc}{p - c} \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$.

23. $\frac{2p^2 \sin A \sin B \sin C}{(\sin A + \sin B + \sin C)^2}$.

24. $p^2 \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2}$.

25. $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \left(\frac{a^2}{\sin A} + \frac{b^2}{\sin B} + \frac{c^2}{\sin C} \right)$.

26. Найти площадь трапеціи $ABCD$ по параллельнымъ сторонамъ: $AD = a$ и $BC = b$, и угламъ A и B.

27. Опредѣлить сторону и площадь правильнаго многоугольника, имѣющаго 40 сторонъ и вписаннаго въ кругѣ, котораго радіусъ равенъ 5,16 аршина.

28. Опредѣлить периметръ и площадь правильнаго 75-угольника, вписаннаго въ кругѣ, котораго радіусъ равенъ $2^5/_9$ сажени.

29. Опредѣлить площадь и сторону правильнаго тридцатиугольника, описаннаго около круга, котораго радіусъ равенъ 0,68 саж.

30. Опредѣлить площадь и периметръ правильнаго девяностоугольника, описаннаго около круга, котораго радіусъ равенъ 4,5 фута.

31. Опредѣлить площадь правильнаго шестидесятиугольника, котораго сторона равна 0,7 аршина.

32. Опредѣлить радіусы вписаннаго и описаннаго круга около правильнаго 36-угольника, котораго сторона равна 4 метрамъ.

33. Опредѣлить радіусы вписаннаго и описаннаго круга около правильнаго 25-угольника, котораго периметръ равенъ 3,675 саж.

34. Опредѣлить площадь сегмента по соотвѣтствующей ему дугѣ $\alpha = 50^0$ и радіусу дуги $r = 2$ аршинамъ.

35. Опредѣлить площадь сегмента по соотвѣтствующей ему дугѣ $\alpha = 135^0 40' 16''$ и хордѣ $a = {}^1/_2$ фута, стягивающей дугу α.

Въ треугольникѣ ABC пустъ O означаетъ центръ описаннаго круга; I, I', I'' и I''' — центры вписаннаго и внѣвписанныхъ круговъ; R — радіусъ описаннаго круга; r, r_a, r_b и r_c — радіусы вписаннаго и внѣвписанныхъ круговъ, касающихся сторонъ a, b и c; q — площадь треугольника.

Показать:

36. $AI = (p - a) \sec\frac{A}{2}$; $\quad AI' = p \sec\frac{A}{2}$;

$AI'' = (p - c) \operatorname{cosec}\frac{A}{2}$ и $AI''' = (p - b) \operatorname{cosec}\frac{A}{2}$.

37. $II' = a \sec\frac{A}{2} = 4R \sin\frac{A}{2}$; $\; II'' = c \operatorname{cosec}\frac{C}{2} = 4R \cos\frac{C}{2}$.

38. $r_a = r \operatorname{tg}^2\frac{\pi - A}{4}$. **39.** $r_a = r \operatorname{ctg}\frac{B}{2} \operatorname{ctg}\frac{C}{2}$.

40. $\sin^2\frac{A}{2} = \frac{r_a - r}{4R}$. **41.** $\cos^2\frac{A}{2} = \frac{r_a + r}{4R}$. **42.** $\operatorname{tg}^2\frac{A}{2} = \frac{rr_a}{r_b r_c}$.

43. $R = \frac{p}{4} \sec\frac{A}{2} \sec\frac{B}{2} \sec\frac{C}{2} = \frac{p - a}{4} \operatorname{cosec}\frac{B}{2} \operatorname{cosec}\frac{C}{2} \sec\frac{A}{2}$.

44. $r = (p - a) \operatorname{tg}\frac{A}{2} = p \operatorname{tg}\frac{A}{2} \operatorname{tg}\frac{B}{2} \operatorname{tg}\frac{C}{2}$.

45. $r_a = p \operatorname{tg}\frac{A}{2} = (p - b) \operatorname{ctg}\frac{C}{2} = (p - c) \operatorname{ctg}\frac{B}{2}$.

46. $q = p^2 \operatorname{tg}\frac{A}{2} \operatorname{tg}\frac{B}{2} \operatorname{tg}\frac{C}{2}$. **47.** $q = r^2 \operatorname{ctg}\frac{A}{2} \operatorname{ctg}\frac{B}{2} \operatorname{ctg}\frac{C}{2}$.

48. $q = r_a^2 \operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}$. **49.** $q = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$.

50. $q = rr_a \operatorname{ctg}\frac{A}{2} = r_b r_c \operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{rr_a r_b r_c}$.

51. $r = 4R \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$. **52.** $r_a = 4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$.

53. $r_a r_b + r_a r_c + r_b r_c = p^2$. **54.** $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$.

55. $R = \frac{r_a + r_b + r_c - r}{4}$. **56.** $\sqrt{r_a r_b} + \sqrt{r_a r_c} + \sqrt{r_b r_c} = r$.

57. $a\cos A + b\cos B + c\cos C = 4R\sin A\sin B\sin C$.

58. $a\operatorname{ctg} A + b\operatorname{ctg} B + c\operatorname{ctg} C = 2(R + r)$.

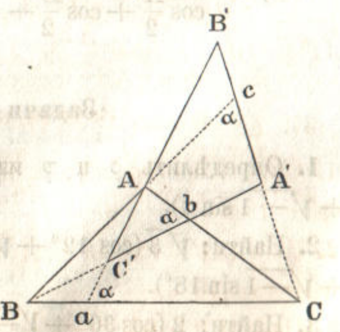
59. Рѣшить треугольникъ по периметру его $2p$, углу A и площ. q.

60. Рѣшить треугольникъ по разности квадратовъ сторонъ a и b, углу C и площади q.

61. Рѣшить треугольникъ по суммѣ квадратовъ его сторонъ, углу A и площади q.

62. Чрезъ вершины A, B и C (фиг. 99) въ треугольникѣ ABC проведемъ прямыя Aa, Bb и Cc подъ однимъ и тѣмъ же угломъ α къ противоположнымъ сторонамъ; эти прямыя въ пересѣченіи составятъ треугольникъ $A'B'C'$. Найти отношеніе площадей треугольниковъ $A'B'C'$ и ABC.

Черт. 99.



63. Данъ треугольникъ ABC; пусть A', B' и C' означаютъ точки касанія вписаннаго круга въ этотъ треугольникъ съ боками: BC, AC и AB. Найти отношеніе площадей треугольниковъ $A'B'C'$ и ABC, а также радіусовъ описанныхъ круговъ около этихъ треугольниковъ.

64. Изъ вершинъ A, B и C въ треугольникѣ ABC опустимъ перпендикуляры: AA', BB' и CC' на противоположныя стороны. Найти отношеніе площадей треугольниковъ $A'B'C'$ и ABC, а также радіусовъ вписанныхъ и описанныхъ около нихъ круговъ.

65. На каждой сторонѣ правильнаго многоугольника отложимъ, въ томъ же направленіи, часть b, и полученныя смежныя точки

соединимъ прямыми; тогда получимъ тоже правильный многоугольникъ. Если означимъ чрезъ a, n, α и m сторону даннаго многоугольника, число его сторонъ, уголъ между двумя боками этихъ многоугольниковъ, направленныхъ одинаково, и отношеніе площадей перваго ко второму, то

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}-\alpha\right)=\frac{2b-a}{a}\operatorname{tg}\frac{\pi}{n},\quad m=\cos^2\frac{\pi}{n}:\cos^2\left(\frac{\pi}{n}-\alpha\right).$$

Рѣшить треугольникъ, когда дано (66 — 80):

66. R, A и B. **67.** r, A и B. **68.** r_a, A и B. **69.** r, r_a, r_b и r_c.
70. R, A и p. **71.** r, A и p. **72.** r, a и $b+c$. **73.** R, r и A.
74. R, r_a и A. **75.** r, r_a и A. **76.** r_a, r_b и C. **77.** r, r_a и R.
78. r_a, r_b и R. **79.** q, r и r_a. **80.** q, r_a и r_b.

81. Означимъ буквами r и r' радіусы круговъ, вписанныхъ въ данный треугольникъ ABC и въ треугольникъ, у котораго вершины въ центрахъ внѣвписанныхъ круговъ; чрезъ $2p$ и $2p'$ — ихъ периметры. Показать, что

$$\frac{r'}{r}=\frac{\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}}\quad\text{и}\quad\frac{rp}{r'p'}=2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

Задачи на XII отдѣлъ.

1. Опредѣлить ρ и φ изъ уравненія: $3+4\sqrt{-1}=\rho(\cos\varphi+ +\sqrt{-1}\sin\varphi)$.

2. Найти: $\sqrt{3}(\cos 12^0+\sqrt{-1}\sin 12^0)$. $\sqrt{2}(\cos 18^0+ +\sqrt{-1}\sin 18^0)$.

3. Найти: $2(\cos 36^0+\sqrt{-1}\sin 36^0)(\cos 6^0-\sqrt{-1}\sin 6^0)$.

4. Найти: $\dfrac{2(\cos 85^0+\sqrt{-1}\sin 85^0)}{\sqrt{2}(\cos 25^0+\sqrt{-1}\sin 25^0)}$.

5. Найти: $[4(\cos 12^0+\sqrt{-1}\sin 12^0)]^3$.

6. Найти: $\sqrt[8]{\cos 16^0+\sqrt{-1}\sin 16^0}$.

Найти величины:

7. $(-1)^{\frac{1}{3}}$. **8.** $(-1)^{\frac{1}{6}}$. **9.** $(1+\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$.

Рѣшить уравненія:

10. $x^5 = 4$. **11.** $2x^3 + 3 = 0$. **12.** $x^3 = 2 - 2\sqrt{-1}$.

13. $x^6 - 5x^3 + 6 = 0$. **14.** $x^8 + 2x^6 + 3x^4 + 2x^2 + 1 = 0$.

15. Дано: $\cos\left(\frac{\pi}{6} + \vartheta\right) = 0{,}51$; найти одну изъ приближенныхъ величинъ ϑ, пренебрегая степенями ϑ, большими четвертой.

16. Опредѣлить $\sin 5^0$ и $\cos 10^0$ съ точностью до 0,0000001.

17. Показать, что $[\cos\vartheta + \cos\varphi + \sqrt{-1}(\sin\vartheta + \sin\varphi)]^n + [\cos\vartheta + \cos\varphi - \sqrt{-1}(\sin\vartheta + \sin\varphi)]^n = 2^{n+1}\left(\cos\frac{\vartheta - \varphi}{2}\right)^n \cos\frac{n(\vartheta + \varphi)}{2}$.

Найти сумму n членовъ въ каждомъ изъ примѣровъ отъ 18 до 38 включительно:

18. $\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \ldots\ldots$

19. $\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \ldots\ldots$

20. $\sin\alpha - \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha + 2\beta) - \ldots\ldots$

21. $\cos\alpha - \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha + 2\beta) - \ldots\ldots$

22. $\sin\alpha - \sin 2\alpha + \sin 3\alpha - \ldots\ldots$

23. $\sin\alpha - \sin 3\alpha + \sin 5\alpha - \ldots\ldots$

24. $\cos\alpha - \cos 2\alpha + \cos 3\alpha - \ldots\ldots$

25. $\cos\alpha - \cos 3\alpha + \cos 5\alpha - \ldots\ldots$

26. $\sec\alpha\sec 2\alpha + \sec 2\alpha\sec 3\alpha + \sec 3\alpha\sec 4\alpha + \ldots\ldots$

27. $\sin^2\alpha + \sin^2 2\alpha + \sin^2 3\alpha + \ldots\ldots$

28. $\sin^2\alpha + \sin^2 3\alpha + \sin^2 5\alpha + \ldots\ldots$

29. $\cos^2\alpha + \cos^2 2\alpha + \cos^2 3\alpha + \ldots\ldots$

30. $\cos^2\alpha + \cos^2 3\alpha + \cos^2 5\alpha + \ldots\ldots$

31. $\sin^3\alpha + \sin^3(\alpha + \beta) + \sin^3(\alpha + 2\beta) + \ldots\ldots$

32. $\cos^3\alpha + \cos^3(\alpha + \beta) + \cos^3(\alpha + 2\beta) + \ldots\ldots$

33. $\sin^4\alpha + \sin^4(\alpha + \beta) + \sin^4(\alpha + 2\beta) + \ldots\ldots$

34. $\cos^4\alpha + \cos^4(\alpha + \beta) + \cos^4(\alpha + 2\beta) + \ldots\ldots$

35. $\cos\alpha\cos(\alpha + \vartheta) + \cos(\alpha + \vartheta)\cos(\alpha + 2\vartheta) + \ldots\ldots$

36. $\sin(n + 1)\alpha\cos\alpha + \sin(n + 2)\alpha\cos 2\alpha + \ldots\ldots$

37. $\sin\alpha\sin 2\alpha + \sin 2\alpha\sin 3\alpha + \sin 3\alpha\sin 4\alpha + \ldots\ldots$

38. $\sin 3\alpha\sin\alpha + \sin 6\alpha\sin 2\alpha + \sin 9\alpha\sin 3\alpha + \ldots\ldots$

39. Показать, что $\operatorname{tg} n\alpha = \frac{\sin\alpha + \sin 3\alpha + \ldots + \sin(2n - 1)\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha + \ldots + \cos(2n - 1)\alpha}$.

40. Показать, что

$$\frac{\sin\alpha+\sin 2\alpha+\ldots\ldots+\sin n\alpha}{\cos\alpha+\cos 2\alpha+\ldots\ldots+\cos n\alpha}=\operatorname{tg}\frac{n+1}{2}\alpha.$$

41. Показать, что,

$$\frac{\sin\alpha-\sin 2\alpha+\sin 3\alpha-\ldots\ldots n\text{ членовъ}}{\cos\alpha-\cos 2\alpha+\cos 3\alpha-\ldots\ldots n\text{ членовъ}}=\operatorname{tg}\frac{n+1}{3}(\pi+\alpha).$$

Опредѣлить сумму n членовъ въ рядахъ:

42. $\sin\alpha\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2+2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{4}\right)^2+4\sin\frac{\alpha}{4}\left(\sin\frac{\alpha}{8}\right)^2+\ldots\ldots\ldots\ldots$

43. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sec\alpha+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}\sec\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{8}\sec\frac{\alpha}{4}+\ldots\ldots\ldots\ldots$

44. $\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{cosec}\alpha+2\operatorname{ctg}2\alpha\operatorname{cosec}2\alpha+2^2\operatorname{ctg}2^2\alpha\operatorname{cosec}2^2\alpha+\ldots\ldots$

45. $\frac{1}{\sin\alpha\sin 2\alpha}+\frac{1}{\sin 2\alpha\sin 3\alpha}+\frac{1}{\sin 3\alpha\sin 4\alpha}+\ldots\ldots\ldots\ldots$

46. $\frac{1}{\sin\alpha\cos 2\alpha}+\frac{1}{\sin 2\alpha\cos 3\alpha}+\frac{1}{\sin 3\alpha\cos 4\alpha}+\ldots\ldots\ldots\ldots$

47. $\sin\alpha\sin 3\alpha+\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{3\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2^2}\sin\frac{3\alpha}{2^2}+\ldots\ldots\ldots\ldots$

48. $\frac{1}{\cos\alpha+\cos 3\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha+\cos 5\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha+\cos 7\alpha}+\ldots\ldots$

49. $\frac{\sin\alpha}{\cos 2\alpha+\cos\alpha}+\frac{\sin 2\alpha}{\cos 4\alpha+\cos\alpha}+\frac{\sin 4\alpha}{\cos 6\alpha+\cos\alpha}+\ldots\ldots\ldots$

50. $\frac{\sin\alpha}{1+2\cos\alpha}+\frac{3\sin 3\alpha}{1+2\cos 3\alpha}+\frac{3^2\sin 3^2\alpha}{1+2\cos 3^2\alpha}+\ldots\ldots\ldots$

51. $\frac{1}{2}\sec\alpha+\frac{1}{2^2}\sec\alpha\sec 2\alpha+\frac{1}{2^3}\sec\alpha\sec 2\alpha\sec 2^2\alpha+\ldots\ldots\ldots$

52. Данный уголъ $ABC=\alpha$ раздѣлимъ на n равныхъ частей прямыми: BD, BE, BF...; изъ точки D, взятой на сторонѣ BC, опустимъ перпендикуляры на прямыя: BD, BE, BF,..., BA. Найти сумму этихъ перпендикуляровъ.

53. Въ кругъ вписанъ правильный многоугольникъ; изъ какой-нибудь точки окружности проведемъ хорды ко всѣмъ вершинамъ многоугольника. Найти сумму квадратовъ этихъ хордъ.

54. Раздѣлимъ окружность на $2n$ равныхъ частей и чрезъ точки дѣленій проведемъ касательныя; изъ какой-либо точки дѣленія

опустимъ перпендикуляры на эти касательныя. Найти сумму квадратовъ этихъ перпендикуляровъ.

55. Въ кругъ радіуса R впишемъ правильный многоугольникъ о n сторонахъ; на одной изъ его сторонъ построимъ рядъ треугольниковъ, имѣющихъ вершины въ вершинахъ даннаго многоугольника. Найти сумму радіусовъ круговъ, вписанныхъ въ эти треугольники.

56. Въ кругъ радіуса R впишемъ правильный многоугольникъ о n сторонахъ; на одной изъ его сторонъ построимъ рядъ треугольниковъ, имѣющихъ вершины въ вершинахъ даннаго многоугольника. Найти сумму площадей круговъ, описанныхъ около этихъ треугольниковъ.

Задачи на XIII отдѣлъ.

Найти наименьшее значеніе:

1. $\operatorname{arc\,sin} \frac{1}{2}$. **2.** $\operatorname{arc\,ctg} \sqrt{3}$. **3.** $\operatorname{arc\,cos} - \sqrt{\frac{1}{2}}$. **4.** $\operatorname{arc\,tg} - 1$.

5. $\operatorname{arc\,sin} \sqrt[4]{0,8}$. **6.** $\operatorname{arc\,cos} (2,365)^{-0,125}$. **7.** $\operatorname{arc\,tg} 2$.

8. $\operatorname{arc\,ctg} \frac{1}{\sqrt[16]{0,4}}$. **9.** $\operatorname{arc\,sec} \sqrt[10]{\frac{4}{3}}$. **10.** $\operatorname{arc\,cosec} \frac{2}{\sqrt[5]{0,1}}$.

Опредѣлить x изъ уравненій:

11. $\operatorname{arc\,ctg}(x\sqrt[32]{\sin 46^0 18''}) = 6^0 4' 58'',9$. **12.** $\operatorname{arc\,tg} x = \sqrt[40]{\frac{1}{3}}$.

13. $\operatorname{arc\,sin} x = (1,26)^{-0,8}$. **14.** $\operatorname{arccos} x + \sqrt[75]{(0,32)^{16}} = 0$.

Найти:

15. $\operatorname{arc\,cos} (\sin \sqrt[36]{\operatorname{tg} 37^0 29' 31''})^{0,8}$. **16.** $\frac{\operatorname{arc\,ctg} \sqrt[48]{\sin 25^0 38'',48}}{(\cos 48^0 35' 24'',3)^{-2,16}}$.

17. $\frac{[1,4 - \operatorname{arc\,tg} (0,6)^{0,6}]^{\frac{11}{4}}}{\sqrt[36]{\cos 0,03869}}$ **18.** $\operatorname{arc\,tg} \left(\frac{\cos \sqrt[16]{0,432}}{0,9426}\right)^{0,24}$.

19. $\left(\frac{\operatorname{arc\,ctg} \sqrt[16]{\pi}}{\sin 0,46}\right)^{\pi}$. **20.** $\operatorname{arc\,tg} \left(\frac{\sin \sqrt[20]{0,5}}{\cos 16^0 19''}\right)^{-0,16}$.

21. $\dfrac{(\operatorname{arc\,ctg}\sqrt[60]{\pi})^{-0,8}\ .\ \operatorname{tg} 40^0 33'}{\sin(0,568)^{\frac{12}{25}}}$. **22.** $\sqrt[36]{\dfrac{\arcsin\sqrt[10]{0,6}}{(\operatorname{tg} 25^0 36'')^{1,5}}}$.

23. $\operatorname{tg}\arcsin\left(\dfrac{\cos 0,25}{\sqrt[36]{1,006}}\right)^{\frac{12}{25}}$. **24.** $\operatorname{arc\,ctg}\sqrt[75]{\sin\sqrt[16]{\dfrac{0,496}{\cos 5^0 6'}}}$.

25. $(\arccos 0,8)^{\sin 0,25}$. **26.** $\left(\operatorname{arc\,tg}\cos\dfrac{1}{\pi}\right)^{\arccos \operatorname{tg}\frac{1}{\pi}}$.

Найти величины:

27. $\sin\left(\arcsin\dfrac{1}{2}+\arccos\dfrac{1}{2}\right)$. **28.** $\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x+\operatorname{arc\,ctg} x)$.

29. $3\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{7}+\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{3}+\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{26}-\dfrac{\pi}{4}$.

Показать:

30. $\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\operatorname{arc\,tg}\sqrt{3}$. **31.** $\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{2}+\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{3}=\dfrac{\pi}{4}$.

32. $\operatorname{arc\,ctg}\dfrac{1}{7}+2\operatorname{arc\,ctg}\dfrac{1}{3}=\dfrac{\pi}{4}$. **33.** $\operatorname{arc\,ctg}\dfrac{3}{4}+\operatorname{arc\,ctg}\dfrac{1}{7}=\dfrac{3\pi}{4}$.

34. $\arccos\dfrac{1}{2}-\arcsin\dfrac{1}{3}=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{9\sqrt{3}-8\sqrt{2}}{5}$.

35. $\arcsin\dfrac{77}{85}=\arcsin\dfrac{3}{5}+\arcsin\dfrac{8}{17}$.

36. $\arccos\dfrac{9}{\sqrt{82}}+\arccos\dfrac{\sqrt{41}}{4}=\dfrac{\pi}{4}$.

37. $\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{3}+\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{5}+\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{7}+\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{8}=\dfrac{\pi}{4}$.

38. $\operatorname{arc\,ctg}\left(\dfrac{1}{a}+n(n+1)a\right)=\operatorname{arc\,tg}(n+1)a-\operatorname{arc\,tg} na$.

39. $\operatorname{arc\,ctg}(n^2+n+1)=\operatorname{arc\,ctg} n-\operatorname{arc\,ctg}(n+1)$.

40. $\operatorname{arc\,tg} a=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{a-b}{1+ab}+\operatorname{arc\,tg}\dfrac{b-c}{1+bc}+\operatorname{arc\,tg} c$.

41. $\arcsin\dfrac{4}{5}+\arcsin\dfrac{5}{13}+\arcsin\dfrac{16}{65}=\dfrac{\pi}{2}$.

42. $3\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{4}+\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{20}=\dfrac{\pi}{4}-\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{1985}$.

43. $\operatorname{arc\,tg} \frac{2a-b}{b\sqrt{3}} + \operatorname{arc\,tg} \frac{2b-a}{a\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3}$.

44. $2 \operatorname{arc\,tg}\left[\operatorname{tg} \frac{A}{2} \sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - B\right)}\right] = \operatorname{arc\,cos} \frac{\cos A + \operatorname{tg} B}{1 + \cos A \operatorname{tg} B}$.

45. $\operatorname{arc\,tg}[(\sqrt{2}+1)\operatorname{tg} a] - \operatorname{arctg}[(\sqrt{2}-1)\operatorname{tg} a] = \operatorname{arc\,tg} \sin 2a$.

46. $\operatorname{tg}(2 \operatorname{arc\,tg} a) = 2 \operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} a + \operatorname{arc\,tg} a^3)$.

47. $\operatorname{arc\,tg}(^1/_2 \operatorname{tg} 2A) + \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{ctg} A) + \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{ctg}^3 A) = 0$.

48. Если $A = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{7}$ и $B = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}$, то $\cos 2A = \sin 4B$.

49. Показать, что $\operatorname{arc\,tg}\frac{x \cos \vartheta}{1 - x \sin \vartheta} - \operatorname{arc\,tg}\frac{x - \sin \vartheta}{\cos \vartheta} = \vartheta$.

50. Показать, что $2\operatorname{tg}\left(\operatorname{arc\,cos}\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} - \operatorname{arc\,cos}\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\right) = a - \frac{1}{a}$.

51. Показать, что $\frac{2b}{a} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,cos}\frac{a}{b}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\operatorname{arc\,cos}\frac{a}{b}\right)$.

52. Показать, что

$$\frac{a^3}{2}\operatorname{cosec}^2\left(\frac{1}{2}\operatorname{arc\,ctg}\frac{a}{b}\right) + \frac{b^3}{2}\sec^2\left(\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}\right) = (a+b)(a^2+b^2).$$

Рѣшить уравненія (отъ 53 до 66) относительно x:

53. $\operatorname{arc\,sin} x + \operatorname{arc\,sin}\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4}$.

54. $\operatorname{arc\,cos} x + \operatorname{arc\,cos}(1 - x) = \operatorname{arc\,cos}(-x)$.

55. $\operatorname{arc\,sin}\frac{2a}{1+a^2} + \operatorname{arc\,sin}\frac{2b}{1+b^2} = 2 \operatorname{arc\,tg} x$.

56. $\operatorname{arc\,cos} x + \operatorname{arc\,cos}(1 - x) = \operatorname{arc\,cos}\sqrt{x - x^2}$.

57. $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x-1} - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x+1} = \operatorname{arc\,tg} a$.

58. $\operatorname{arc\,tg} x + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,sec} 5x = 45^0$.

59. $\operatorname{arc\,cos}\frac{1-x^2}{1+x^2} + \operatorname{arc\,tg}\frac{2x}{1-x^2} = 240^0$. **60.** $\operatorname{arc\,tg} x = \operatorname{arc\,tg} 5x$.

61. $\operatorname{arc\,tg}(x - 1) + \operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg}(x + 1) = \operatorname{arc\,tg} 3x$.

62. $\operatorname{arc\,sin} 2x - \operatorname{arc\,sin} x\sqrt{3} = \operatorname{arc\,sin} x$.

63. $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{4} + 2 \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{6} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{4}$.

64. $\sin[2 \operatorname{arc}\{\cos \operatorname{ctg}(2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} x)\}] = 0.$

65. $\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{1}{a-1} = \operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{1}{x} + \operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{1}{a^2 - x + 1}.$

66. Если $\sin(\pi \cos\vartheta) = \cos(\pi \sin\vartheta)$, то $\vartheta = \pm\frac{1}{2}\operatorname{arc}\sin\frac{3}{4}$.

67. Найти цѣлыя рѣшенія для x и y изъ уравненія:

$$\operatorname{arc}\operatorname{tg} x + \operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{1}{y} = \operatorname{arc}\operatorname{tg} 3.$$

Найти:

68. $\operatorname{arc}\operatorname{tg} 3 + \operatorname{arc}\operatorname{tg} 7 + \ldots + \operatorname{arc}\operatorname{tg}(1 + n + n^2)$.

69. Опредѣлить сумму n членовъ ряда:

$$\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{1}{1+1+1^2} + \operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{1}{1+2+2^2} + \operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{1}{1+3+3^2} + \ldots$$

70. Опредѣлить сумму n членовъ ряда:

$$\operatorname{arc}\operatorname{tg} x + \operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{x}{1+1.2x^2} + \operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{x}{1+2.3x^2} + \ldots.$$

РѢШЕНІЕ ЗАДАЧЪ.

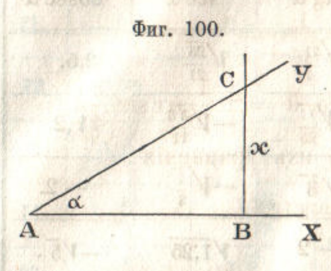
Отвѣты на предложенные вопросы.

Введеніе. **1.** 3437′,75 съ точн. до 0′,01. **2.** 206264″,81 съ точн. до 0″,01. **3.** $\frac{1}{3}\pi$ и $\frac{3}{4}\pi$. **4.** 105^0; $266^0 24'$; $797^0 8' 34''$,286. **5.** 0,6457718. **6.** 4,7123890. **7.** 0,0123918. **8.** 0,6161012. **9.** 0,0001119. **10.** 0,0944708. **11.** 3,4362964. **12.** 0,8553963. **13.** 3,7021492. **14.** 1,5066979. **15.** 6,0801047. **16.** 9,0203740. **17.** $12^0 19'$. **18.** $146^0 30''$. **19.** 0″,908. **20.** 2′8″,02. **21.** 57′55″,58. **22.** $1^0 39' 0''$,47. **23.** $6^0 52''$,85. **24.** $71^0 21' 19''$,95. **25.** $113^0 49' 14''$,02. **26.** $142^0 5' 36''$,74. **27.** $154^0 41' 55''$. **28.** $172^0 48' 14''$,66. **29.** $202^0 51' 59''$,12. **30.** $229^0 11' 19''$,85. **31.** $286^0 28' 44''$,02. **32.** $550^0 2' 22''$,12.

Отдѣлъ I. **1.** $\sin(-90^0) = -1$; $\cos(-90^0) = 0$; $\sin(-180^0) = 0$; $\cos(-180^0) = -1$; $\sin(-270^0) = 1$; $\cos(-270^0) = 0$; $\sin(-360^0) = 0$; $\cos(-360^0) = 1, \ldots$ **2.** 1. **3.** -1. **4.** ∞. **5.** -1. **6.** 1. **7.** 2. **8.** 0. **9.** $\frac{1}{2}$. **10.** $-\sqrt{\frac{1}{3}}$. **11.** -1. **12.** $\frac{1}{2}\sqrt{3}$. **13.** 1. **14.** $a + b$. **15.** 7. **16.** -19. **17.** 32. **18.** $-5\frac{1}{3}$. **19.** $(a+b)^2$. **20.** $-n$. **21.** $-4,6$. **22.** 0.

23. ∞. **24.** 0. **25.** $(m-n)^2$. **26.** a^2-b^2. **27.** 7. **28.** $\sqrt{\frac{3}{2}}$. **29.** $2\sqrt{2}$.

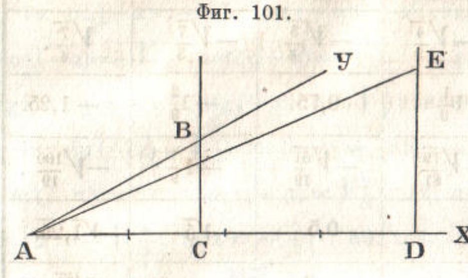
Фиг. 100.



31. Для примѣра построимъ: $k\operatorname{tg}\alpha$. Означимъ эту длину буквою x; тогда $k\operatorname{tg}\alpha=x$ или $\operatorname{tg}\alpha=\frac{x}{k}$. Но тангенсъ угла есть отношеніе перпенд. къ проекціи наклонной, а потому строимъ уголъ $XAY=\alpha$ и, отложивъ часть $AB=a$, возставляемъ изъ точки B перпенд. къ AX, кот. пересѣчетъ прямую AY въ точкѣ C. Тогда $BC=x$.

32. Для примѣра рѣшимъ задачу: d) $\operatorname{ctg}x=4\operatorname{tg}\alpha$. Чертимъ уголъ $XAУ=\alpha$ и изъ какой либо точки B, взятой на $AУ$, опустимъ перпенд. BC на AX; тогда $\operatorname{tg}\alpha=\frac{BC}{AC}$, а $\operatorname{ctg}x=$ $=4\operatorname{tg}\alpha=\frac{4BC}{AC}$. Но ctg угла есть отношеніе проекціи наклонной къ перпенд., а потому на прямой AX откладываемъ часть $AD=4BC$ и изъ точки D возставляемъ перпенд. къ прямой AX, на кот. откладываемъ часть $DE=AC$. Уголъ EAX будетъ искомый.

Фиг. 101.



33. 0,6. **34.** $\frac{2}{3}\sqrt{2}$. **35.** 0,75. **36.** 0,6. **37.** $c=20$; $b=\sqrt{204}$. **38.** $a=10$; $b=10\sqrt{15}$. **39.** $c=2\sqrt{15}$; $b=2\sqrt{6}$. **40.** $c=27$; $b=3\sqrt{17}$. **41.** $b=2$; $c=2\sqrt{37}$. **42.** $b=1{,}2$; $c=\sqrt{2{,}08}$. **43.** $a=2$; $c=2\sqrt{5}$. **44.** $a=9$; $b=12$. **45.** $a=18$; $c=9\sqrt{5}$. **46.** $b=0{,}8$; $c=1$.

№	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\sec\alpha$	$\operatorname{cosec}\alpha$
47.		$\pm 0{,}6$	$\pm 1\frac{1}{3}$	$\pm 0{,}75$	$\pm 1\frac{2}{3}$	$1{,}25$.
48.	$\pm\sqrt{\frac{8}{9}}$		$\pm\sqrt{8}$	$\pm\sqrt{\frac{1}{8}}$	± 3	$\pm\sqrt{\frac{9}{8}}$.
49.	$\pm\sqrt{\frac{25}{41}}$	$\pm\sqrt{\frac{16}{41}}$		0,8	$\pm\sqrt{\frac{41}{16}}$	$\pm\sqrt{\frac{41}{25}}$.
50.	$\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\pm\sqrt{2}$	$\pm\sqrt{0{,}5}$		$\pm\sqrt{1{,}5}$.
51.	$\frac{1}{4}$	$\pm\sqrt{\frac{15}{16}}$	$\pm\sqrt{\frac{1}{15}}$	$\pm\sqrt{15}$	$\pm\sqrt{\frac{16}{15}}$.	

№	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\sec\alpha$	$\operatorname{cosec}\alpha$
52.		$\sqrt{0{,}84}$	$\sqrt{\frac{4}{21}}$	$\sqrt{\frac{21}{4}}$	$\sqrt{\frac{25}{21}}$	2,5.
53.		$-\sqrt{\frac{11}{36}}$	$-\sqrt{\frac{25}{11}}$	$-\sqrt{\frac{11}{25}}$	$-\sqrt{\frac{36}{11}}$	1,2.
54.		$-\sqrt{\frac{3}{4}}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{\frac{4}{3}}$	-2.
55.		$\sqrt{0{,}8}$	$-0{,}5$	-2	$\sqrt{1{,}25}$	$-\sqrt{5}$.
56.	$\sqrt{\frac{35}{36}}$		$\sqrt{35}$	$\sqrt{\frac{1}{35}}$	6	$\sqrt{\frac{36}{35}}$.
57.	$\sqrt{\frac{4}{7}}$		$-\sqrt{\frac{4}{3}}$	$-\sqrt{\frac{3}{4}}$	$-\sqrt{\frac{7}{3}}$	$\sqrt{\frac{7}{4}}$.
58.	$-0{,}8$		$1\frac{1}{3}$	0,75	$-1\frac{2}{3}$	$-1{,}25$.
59.	$-\sqrt{0{,}19}$		$-\sqrt{\frac{19}{81}}$	$-\sqrt{\frac{81}{19}}$	$-1\frac{1}{9}$	$-\sqrt{\frac{100}{19}}$.
60.	$\sqrt{0{,}8}$	$\sqrt{0{,}2}$		0,5	$\sqrt{5}$	$\sqrt{1{,}25}$.
61.	$\sqrt{\frac{49}{50}}$	$-\sqrt{\frac{1}{50}}$		$-\frac{1}{7}$	$-\sqrt{50}$	$\sqrt{\frac{50}{49}}$.
62.	$-0{,}8$	$-0{,}6$		0,75	$-1\frac{2}{3}$	$-1{,}25$.
63.	$-0{,}6$	0,8		$-1\frac{1}{3}$	1,25	$-1\frac{2}{3}$.
64.	$\sqrt{0{,}9}$	$\sqrt{0{,}1}$	3		$\sqrt{10}$	$\sqrt{\frac{10}{9}}$.
65.	0,5	$-\sqrt{0{,}75}$	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$		$-\sqrt{\frac{4}{3}}$	2.
66.	$-\sqrt{\frac{25}{89}}$	$-\sqrt{\frac{64}{89}}$	$\frac{5}{8}$		$-\sqrt{\frac{89}{64}}$	$-\sqrt{\frac{89}{25}}$.
67.	$-\sqrt{0{,}8}$	$\sqrt{0{,}2}$	-2		$\sqrt{5}$	$-\sqrt{1{,}25}$.
68.	$\sqrt{\frac{8}{9}}$	$\frac{1}{3}$	$\sqrt{8}$	$\sqrt{\frac{1}{8}}$		$\sqrt{\frac{9}{8}}$.
69.	$\sqrt{0{,}96}$	$-0{,}2$	$-\sqrt{24}$	$-\sqrt{\frac{1}{24}}$		$\sqrt{\frac{25}{24}}$.
70.	$-\sqrt{\frac{24}{49}}$	$-\frac{5}{7}$	$\sqrt{\frac{24}{25}}$	$\sqrt{\frac{25}{24}}$		$-\sqrt{\frac{49}{24}}$.

№	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\sec\alpha$	$\operatorname{cosec}\alpha$
71.	$-0{,}8$	$0{,}6$	$-1\frac{1}{3}$	$-0{,}75$		$-1{,}25.$
72.	$0{,}75$	$\sqrt{\frac{7}{16}}$	$\sqrt{\frac{9}{7}}$	$\sqrt{\frac{7}{9}}$	$\sqrt{\frac{16}{7}}.$	
73.	$0{,}4$	$-\sqrt{0{,}84}$	$-\sqrt{\frac{4}{21}}$	$-\sqrt{\frac{21}{4}}$	$-\sqrt{\frac{25}{21}}.$	
74.	$-\frac{1}{8}$	$-\sqrt{\frac{63}{64}}$	$\sqrt{\frac{1}{63}}$	$\sqrt{63}$	$-\sqrt{\frac{64}{63}}.$	
75.	$-\frac{1}{3}$	$\sqrt{\frac{8}{9}}$	$-\sqrt{\frac{1}{8}}$	$-\sqrt{8}$	$\sqrt{\frac{9}{8}}.$	

76. $\sin(-\alpha)=-0{,}3$; $\cos(-\alpha)=-\sqrt{0{,}91}$; $\operatorname{tg}(-\alpha)=\sqrt{\frac{9}{91}}$; $\operatorname{ctg}(-\alpha)=\sqrt{\frac{91}{9}}$; $\sec(-\alpha)=-\sqrt{\frac{100}{91}}$; $\operatorname{cosec}(-\alpha)=-\frac{10}{3}$. **77.** $\sin(-\alpha)=\sqrt{\frac{2}{3}}$; $\cos(-\alpha)=-\sqrt{\frac{1}{3}}$; $\operatorname{tg}(-\alpha)=-\sqrt{2}$; $\operatorname{ctg}(-\alpha)=-\sqrt{\frac{1}{2}}$; $\sec(-\alpha)=-\sqrt{3}$; $\operatorname{cosec}(-\alpha)=\sqrt{\frac{3}{2}}$.

78. $\sin(-\alpha)=\sqrt{\frac{8}{9}}$; $\cos(-\alpha)=\frac{1}{3}$; $\operatorname{tg}(-\alpha)=\sqrt{8}$; $\operatorname{ctg}(-\alpha)=\sqrt{\frac{1}{8}}$; $\sec(-\alpha)=3$; $\operatorname{cosec}(-\alpha)=\sqrt{\frac{9}{8}}$. **79.** $\operatorname{cosec}(-\alpha)=-\sqrt{5}$; $\cos\alpha=-\sqrt{\frac{4}{5}}$; $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{1}{2}$. **80.** $\operatorname{tg}(-\alpha)=-\sqrt{8}$; $\sin(-\alpha)=\sqrt{\frac{8}{9}}$.

81. $\sec(-\alpha)=-\sqrt{\frac{16}{15}}$; $\operatorname{ctg}(-\alpha)=\sqrt{15}$; $\sin(-\alpha)=-0{,}25$.

82. $\frac{b^2-a^2}{ab}$. **83.** $-\frac{m}{n}\sqrt{\frac{m}{m+n}}$. **84.** $\frac{\sqrt{ab}}{a+b}$. **105.** $\sin x=\pm\sqrt{\frac{b}{a}}$.

106. $\operatorname{tg}x=\pm\sqrt{b}$. **107.** $\operatorname{tg}x=\pm\sqrt{a}$. **108.** $\cos x=-1$ и $\operatorname{tg}x=\frac{b}{a}$.

109. $\sin x=0$ и $\cos x=\frac{b-a}{b+a}$. **110.** $\cos x=1$ и $\cos x=\frac{a-b}{b}$.

111. $\operatorname{tg}x=\frac{a^2-1}{2a}$. **112.** $\operatorname{tg}x=1$ и 5. **113.** $\sin x=\frac{-a\pm\sqrt{a^2+4b^2}}{2b}$.

114. $\cos x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2+4a^2}}{2a}$. **115.** $\sin x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ и $\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$.

116. $\sin x=\sqrt{0{,}5}$. **117.** $\operatorname{tg}x=\pm\frac{b}{a}$. **118.** $\operatorname{tg}x=\pm\frac{1}{2}$ и $\pm\sqrt{\frac{3}{5}}$.

119. $\sin x=\pm\sqrt{\frac{b^2-a^2}{b^2-1}}$; $\sin y=\pm\frac{1}{a}\sqrt{\frac{b^2-a^2}{b^2-1}}$. **120.** $\operatorname{tg}x=\pm\sqrt[4]{0{,}8}$.

121. $\operatorname{tg}x=\frac{4}{3}$ и $\frac{2}{3}$. **125.** 0,5. **126.** 2. **127.** 2. **128.** $-0{,}5$. **129** $-\sqrt{2}$. **130.** -1

Отдѣлъ II. **1.** *a*) $\sin 20^0$; *b*) $-\sin 52^017'$; *c*) $-\sin 42^059'31''$; *d*) $-\sin 53^0$; *e*) $-\sin 54^0$; *f*) $-\sin 71^034'$; *g*) $\sin 18^06'18''$; *h*) $\sin 10^0$. **2.** *a*) $\cos 6^047'35''$; *b*) $-\cos 67^0$; *c*) $-\cos 72^056'$; *d*) $\cos 10^0$; *e*) $-\cos 14^059'36''$; *f*) $-\cos 38^0$; *g*) $\cos 51^0$; *h*) $-\cos 53^0$. **3.** *a*) $-\operatorname{tg} 79^018'$; *b*) $\operatorname{tg} 2^05'$; *c*) $-\operatorname{tg} 52^0$; *d*) $-\operatorname{tg} 44^0$; *e*) $-\operatorname{tg} 35^025''$; *f*) $\operatorname{tg} 22^059'52''$; *g*) $-\operatorname{tg} 5^0$; *h*) $-\operatorname{tg} 35^0$. **4.** *a*) $-\operatorname{ctg} 2^025'46''$;

b) ctg $75^0 34'$; *c*) — ctg 78^0; *d*) — ctg 25^0; *e*) — ctg $7^0 48' 36''$; *f*) ctg 20^0; *g*) — ctg 2^0; *h*) — ctg 20^0. **5.** *a*) — sec $24^0 19''$; *b*) sec 50^0; *c*) sec 62^0; *d*) — sec $54^0 30'$. **6.** *a*) — csc $52^0 24'$; *b*) csc 18^0; *c*) — csc 82^0; *d*) — csc 40^0.

№	sin	cos	tg	ctg	sec	cosec
7.	$-0{,}8$	$0{,}6$	$-0{,}75$	$-0{,}75$	$-1{,}25$	$-1\frac{2}{3}$.
8.	$-\frac{2}{3}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\sqrt{\frac{1}{8}}$	$-\sqrt{\frac{1}{8}}$	$-\sqrt{\frac{9}{8}}$	-3.
9.	$-\frac{2}{3}$	$\sqrt{\frac{5}{9}}$	$\sqrt{\frac{5}{4}}$	$\sqrt{\frac{5}{4}}$	$1{,}5$	$1{,}5$.
10.	$\sqrt{0{,}84}$	$\sqrt{0{,}84}$	$\sqrt{\frac{4}{21}}$	$-\sqrt{\frac{4}{21}}$	$-2{,}5$	$2{,}5$.
11.	$-0{,}6$	$-0{,}8$	$1\frac{1}{3}$	$-0{,}75$	$-1{,}25$	$-1{,}25$.
12.	$-\frac{1}{9}$	$-\frac{4}{9}\sqrt{5}$	$\sqrt{80}$	$-\sqrt{\frac{1}{80}}$	9	9.
13.	$\sqrt{0{,}75}$	$-0{,}5$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$-\sqrt{3}$	2	$-\sqrt{\frac{4}{3}}$.
14.	$-\sqrt{0{,}84}$	$-0{,}4$	$-\sqrt{\frac{4}{21}}$	$-\sqrt{\frac{21}{4}}$	$2{,}5$	$-\sqrt{\frac{5}{21}}$.
15.	$\sqrt{0{,}9}$	$-\sqrt{0{,}9}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\sqrt{\frac{10}{9}}$	$-\sqrt{10}$.
16.	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\sqrt{\frac{1}{8}}$	$\sqrt{8}$	$-\sqrt{\frac{9}{8}}$	-3.
17.	$\sqrt{0{,}2}$	$\sqrt{0{,}2}$	$-0{,}5$	-2	$-\sqrt{\frac{5}{4}}$	$\sqrt{5}$.
18.	$-\sqrt{\frac{4}{13}}$	$\sqrt{\frac{4}{13}}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\sqrt{\frac{13}{4}}$	$-\sqrt{\frac{13}{4}}$.
19.	$0{,}8$	$-0{,}8$	$1\frac{1}{3}$	$-0{,}75$	$-1\frac{2}{3}$	$1\frac{2}{3}$.
20.	$-\sqrt{\frac{25}{26}}$	$-\sqrt{\frac{1}{26}}$	$-0{,}2$	5	$\sqrt{\frac{26}{25}}$	$\sqrt{26}$.
21.	$0{,}2$	$0{,}2$	$-\sqrt{\frac{1}{24}}$	$-\sqrt{\frac{1}{24}}$	5	$-\sqrt{\frac{25}{24}}$.
22.	$-\sqrt{\frac{16}{41}}$	$\sqrt{\frac{16}{41}}$	$-0{,}8$	$-0{,}8$	$\sqrt{\frac{41}{25}}$	$-\sqrt{\frac{41}{25}}$.
23.	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{0{,}5}$	$\sqrt{0{,}5}$	$\sqrt{1{,}5}$	$\sqrt{3}$.
24.	$-0{,}8$	$-0{,}8$	$1\frac{1}{3}$	$-1\frac{1}{3}$	$1{,}25$	$-1{,}25$.

25. $-\sqrt{\frac{1}{2}}$. **26.** $\sqrt{\frac{3}{4}}$. **27.** $-\sqrt{\frac{1}{3}}$. **28.** -1. **29.** $-\sqrt{\frac{1}{3}}$. **30.** $-\sqrt{\frac{3}{4}}$.

31. $-\sqrt{\frac{4}{3}}$. **32.** $-\sqrt{\frac{4}{3}}$. **33.** $1-\sqrt{\frac{1}{2}}$. **34.** $-\sqrt{\frac{3}{4}}$. **35.** $-\frac{1}{2}$. **36.** 1.

37. $-\frac{1}{2}$. **38.** -1. **39.** $\sqrt{3}$. **40.** $-\sqrt{\frac{4}{3}}$. **41.** $1+\sqrt{\frac{3}{4}}$. **42.** $-\frac{1}{2}$.

43. $-3\sqrt{\frac{1}{2}}$. **44.** $-\sqrt{3}$. **45.** $-2\sqrt{2}$. **46.** $-2\sqrt{2}$. **47.** 0. **48.** $\sqrt{3}$.

49. $3(7-4\sqrt{3})$. **50.** $\frac{1}{2}(3\sqrt{3}-1)$. **51.** $-\sqrt{\frac{1}{3}}$. **52.** $4\frac{21}{26}$. **53.** $-0,5$.

54. 0,48. **55.** $\mp\frac{4}{9}$. **56.** $0, \pm 1$ и $\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$. **57.** 0 и ± 1. **58.** $\pm\sqrt{\frac{3}{4}}$ и $\frac{1}{2}$.

59. 0 и $\pm\sqrt{3}$. **60.** $\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$ и $\pm\infty$. **61.** $\pm\infty$, $\pm\sqrt{2}$ и 1. **62.** n.

63. $-\sin\alpha$. **64.** $\operatorname{ctg}^2\alpha$. **65.** 0. **66.** 0. **67.** a) $183^0 24'$; b) $221^0 33' 13''$; c) 160^0; d) $225^0 15'$; e) $107^0 41' 25''$; f) $105^0 44'$; g) 124^0; h) $120^0 6'$.

68. 45^0, 225^0, 405^0, 585^0, 765^0 и 945^0. **69.** 300^0, 420^0, 660^0 и 780^0.

70. -240^0 и -300^0. **71.** -120^0, -300^0, -480^0 и -660^0.

72. $x=\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi$. **73.** $x=2n\pi$. **74.** $x=\left(n+\frac{3}{4}\right)\pi$. **75.** Невозможно.

76. $x=\left(2n\pm\frac{2}{3}\right)\pi$. **77.** $x=\left(n\pm\frac{1}{6}\right)\pi$. **78.** $x=\left(n\pm\frac{1}{4}\right)\pi$.

79. $x=\left(n\pm\frac{1}{4}\right)\pi$. **80.** $x=\left(n\pm\frac{1}{3}\right)\pi$. **81.** $x=\left(n+\frac{3}{4}\right)\pi$.

82. $x=\left(n+\frac{1}{4}\right)\pi$. **83.** $x=n\pi+\alpha$. **84.** $x=n\pi\pm\alpha$.

85. $x=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\pm\alpha$. **86.** $x=n\pi\pm\alpha$. **87.** $x=\left(2n+\frac{7}{4}\right)\pi$.

88. $x=\left(2n+\frac{7}{6}\right)\pi$. **89.** Нѣтъ. **90.** $x=\left(n+\frac{2}{3}\right)\pi$. **91.** $x=(4n+1)\frac{\pi}{6}$.

92. $x=(2n+1)\frac{\pi}{3}$. **93.** $x=\frac{2}{5}n\pi$ и $\frac{1}{3}(2n+1)\pi$.

94. $x=n\pi$ и $\left(2n\pm\frac{1}{3}\right)\pi$. **95.** $x=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$ и $n\pi+(-1)^n.\frac{\pi}{6}$.

96. $x=n\pi+(-1)^n.\frac{\pi}{3}$. **97.** $x=n\pi+(-1)^n.\frac{\pi}{6}$. **98.** $x=\left(2n+\frac{1}{4}\right)\pi$.

99. $x=2n.180^0+45^0$ и $y=15^0$. **100.** $x=2n\pi$ и $n\pi\pm(-1)^n.\frac{\pi}{4}$ и $y=2n\pi$ и $n\pi\pm(-1)^n.\frac{\pi}{6}$. **101.** $x=n\pi\pm(-1)^n.\frac{\pi}{3}$.

Отдѣлъ III. 1. $0,4\sqrt{3}-0,3$. **2.** $\sqrt{0,2}+\sqrt{0,15}$. **3.** $-0,5$.

4. $-\sqrt{\frac{4}{13}}$. **5.** $4\sqrt{5}-9$. **6.** $(25+8\sqrt{7}):3\sqrt{3}$. **7.** $\sin(\alpha\pm\beta)=$ $=0,3\sqrt{3}\pm 0,4$; $\cos(\alpha\pm\beta)=0,4\sqrt{3}\mp 0,3$; $\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{48\pm 25\sqrt{3}}{39}$; $\operatorname{ctg}(\alpha\pm\beta)=\frac{48\mp 25\sqrt{3}}{11}$; $\sec(\alpha\pm\beta)=\frac{10(4\sqrt{3}\pm 3)}{39}$; $\operatorname{cosec}(\alpha\pm\beta)=$

$= \frac{10(3\sqrt{3} \mp 4)}{11}$. **8.** $\sin(\alpha \pm \beta) = \frac{1}{9}(2 \pm \sqrt{10})$; $\cos(\alpha \pm \beta) = \frac{1}{9}(4\sqrt{2} \mp 5)$; $\text{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{1}{3}(2 \pm 2\sqrt{5})$; $\text{ctg}(\alpha \pm \beta) = -\frac{3}{8}(1 \mp \sqrt{5})$; $\sec(\alpha \pm \beta) = \frac{1}{3}(4\sqrt{2} \pm \sqrt{5})$; $\text{cosec}(\alpha \pm \beta) = -\frac{3}{2}(2 \mp \sqrt{10})$. **9.** $\sin(\alpha \pm \beta) = 0{,}2\sqrt{2} \pm 0{,}4\sqrt{3}$; $\cos(\alpha \pm \beta) = 0{,}2\sqrt{3} \mp 0{,}4\sqrt{2}$; $\text{tg}(\alpha \pm \beta) = -\sqrt{6} \mp 2$; $\text{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{1}{2}(-\sqrt{6} \pm 2)$; $\sec(\alpha \pm \beta) = -\sqrt{3} \mp \sqrt{8}$; $\text{cosec}(\alpha \pm \beta) = -\sqrt{0{,}5} \pm \sqrt{3}$. **10.** $\sin(\alpha + \beta) = \sqrt{\frac{1}{2}}$; $\sin(\alpha - \beta) = \sqrt{\frac{1}{50}}$; $\cos(\alpha + \beta) = -\sqrt{\frac{1}{2}}$; $\cos(\alpha - \beta) = \sqrt{\frac{49}{50}}$; $\text{tg}(\alpha + \beta) = -1$; $\text{tg}(\alpha - \beta) = \frac{1}{7}$; $\text{ctg}(\alpha + \beta) = -1$; $\text{ctg}(\alpha - \beta) = 7$; $\sec(\alpha + \beta) = -\sqrt{2}$; $\sec(\alpha - \beta) = \sqrt{\frac{50}{49}}$; $\text{cosec}(\alpha + \beta) = \sqrt{2}$; $\text{cosec}(\alpha - \beta) = \sqrt{50}$. **11.** $0{,}2 + \sqrt{0{,}63}$; $-\sqrt{0{,}21} - \sqrt{0{,}12}$; $\frac{1}{9}(8\sqrt{21} - 25\sqrt{3})$; $\frac{1}{59}(8\sqrt{21} - 25\sqrt{3})$.

12. $\frac{1}{12}(\sqrt{35} - 6)$; $\frac{1}{12}(3\sqrt{5} - 2\sqrt{7})$; $-\frac{1}{17}(32\sqrt{5} + 27\sqrt{7})$; $-27\sqrt{7} - 32\sqrt{5}$.

13. -1; $\frac{1}{7}$; $-\sqrt{\frac{49}{50}}$; $-\sqrt{\frac{1}{2}}$. **14.** $-0{,}96$; $0{,}28$. **15.** $\pm\frac{4(a-b)\sqrt{ab}}{(a+b)^2}$; $\frac{4ab-(a-b)^2}{(a+b)^2}$. **16.** $-2\sqrt{2}$. **17.** $\frac{63}{16}$. **18.** $\frac{5}{9}\sqrt{3}$. **19.** $0{,}568$. **20.** $\frac{55}{37}$; $-\frac{119}{120}$.
21. $-0{,}96$; $0{,}936$; $\frac{24}{7}$; $\frac{117}{44}$; $-0{,}5376$. **22.** $-\frac{1}{3}$; $-\sqrt{\frac{2}{27}}$; $\sqrt{0{,}08}$; $\sqrt{\frac{1}{8}}$; $-\frac{7}{9}$.
23. $0{,}6$; $\sqrt{0{,}676}$; $-\frac{24}{7}$; $-\frac{4}{3}$; $-1{,}25$. **24.** $\frac{23}{27}$; $-\frac{23}{20}\sqrt{2}$; $\frac{17}{112}\sqrt{2}$; $1\frac{2}{7}$.

25. $\sin(\alpha + 2\beta) = \frac{7}{18} + \frac{2}{9}\sqrt{6}$; $\cos(2\alpha - \beta) = \frac{1}{3}\sqrt{2} + \frac{1}{2}$; $\text{tg}(2\alpha + 2\beta) = -(81\sqrt{3} + 112\sqrt{2}) : 47$. **26.** 45^0. **27.** $(1-p^2) : 2p$. **28.** $n\pi$. **29.** $\sqrt{\frac{8}{9}}$ и $\frac{1}{3}$.
30. $-0{,}4$. **31.** $\text{tg}\,\alpha = -0{,}75$; $\sin\alpha = 0{,}6$; $\cos\alpha = -0{,}8$. **32.** $\frac{3}{5}$ и $-\frac{4}{5}$.

88. $x = n\pi$ и $2n\pi \pm \frac{1}{6}\pi$. **89.** $x = 2n\pi \pm \frac{1}{2}\pi$ и $2n\pi \pm \frac{1}{3}\pi$.

90. $x = n\pi$, $n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}$ и $n\pi + (-1)^n\frac{7\pi}{6}$. **91.** $x = n\pi \pm \frac{1}{6}\pi$ и $n\pi$.

92. $x = n\pi + (-1)^n . \frac{\pi}{4}$. **93.** $x = n\pi$ и $\text{tg}x = \pm\sqrt{\frac{1}{7}}$.

94. $\sin 2x = \frac{b}{1 + \sin 2\alpha}$. **95.** $\sin x = 1, -1$ и 0. **96.** $\sin 2x = \frac{a}{a+b}$.

97. $\text{tg}\,x = -1, \frac{1}{\sqrt{3}}$ и $\frac{a}{2b-1}$. **98.** $\sin 2x = 1$ и $\frac{b^2 - 4a^2}{b^2 + 4a^2}$. **99.** $\cos 2x = 0$

1 и $\frac{4a^2 - b^2}{4a^2 + b^2}$. **100.** $\text{tg}\,x = \pm\sqrt{\frac{b-2a}{b+2a}}$. **101.** $\text{tg}\,x = 1$ и -2.

102. $\cos x = \frac{-d \pm \sqrt{d^2 + 4c^2}}{2c}$. **103.** $\cos x = \frac{n}{2m}$. **104.** $\text{ctg}\,x = b$.

105. $x=\frac{1}{2}n\pi$ и $n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$. **106.** $x=\frac{2}{3}n\pi$, $\frac{1}{4}\pi-n\pi$ и $2n\pi-\frac{1}{2}\pi$.

107. $\frac{1}{3}(2n\pi\pm\frac{1}{3}\pi)$ и $\frac{1}{4}(2n\pi\pm\frac{1}{2}\pi)$. **108.** $x=\frac{1}{3}n\pi$ и $\frac{1}{4}(2n\pi\pm\frac{1}{3}\pi)$.

109. $2x=n\pi\pm\frac{1}{2}\pi$ и $2n\pi\pm\frac{2}{3}\pi$. **110.** $x=\frac{2}{5}n\pi$, $n\pi\pm\frac{1}{2}\pi$ и $(2n\pm1)\pi$.

111. $x=\frac{1}{2}n\pi$ и $2n\pi\pm\frac{2}{3}\pi$. **112.** $x=n\pi\pm\frac{1}{2}\pi$. **113.** $2x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$.

114. $x=n\pi-\frac{1}{4}\pi$ и $\frac{1}{2}n\pi-\frac{1}{8}\pi$. **115.** $2x=(2n+1)\pi$ и $2n\pi\pm\frac{1}{2}\pi$.

116. $x=n\pi\pm\frac{1}{10}\pi$ и $n\pi\pm\frac{3}{10}\pi$. **117.** $4x=n\pi\pm(-1)^n\frac{\pi}{6}$ и $x=n\pi+\frac{1}{2}\pi$.

118. $x=n\pi\pm\frac{1}{4}\pi$ и $n\pi\pm\frac{1}{6}\pi$. **119.** $x=-\frac{1}{4}n\pi$ и $\frac{1}{8}n\pi$. **120.** $x=n\pi$ и $n\pi\pm\frac{1}{6}\pi$. **121.** $2x-\alpha=2n\pi\pm\frac{1}{3}\pi$. **122.** $x=2n\pi+\frac{1}{4}\pi$. **123.** $x=2n\pi\pm\frac{1}{5}\pi$ и $2n\pi\pm\frac{3}{5}\pi$. **124.** $x=n\pi$ и $n\pi+\frac{3}{4}\pi$. **125.** Данное уравненіе разлагается на три уравненія: $\sin x=-1$, $\sin\frac{1}{2}x=0$ и $\operatorname{tg}\frac{1}{2}x=2$.

126. $x=\frac{1}{4}(2n+1)\pi$ и $7x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$. **127.** $x=n\pi\pm\frac{\pi}{6}$.

128. 0 и $\pm\sqrt{2}$. **129.** $\cos x=\frac{1}{2}$ и -1.

130. $x=\frac{\pi}{16}$. **131.** $\operatorname{tg}x=\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}$. **132.** $\operatorname{tg}x=2\pm\sqrt{3}$.

133. $\sin x=\pm\frac{b\sin\alpha-a}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\sin\alpha}}$. **134.** $\sin x=\pm\frac{m\sin\alpha}{\sqrt{m^2+n^2-2mn\cos\alpha}}$.

135. $x=a\cos(\alpha-\beta)$ и $-a\cos(\alpha+\beta)$.

136. $\cos(x+1)a=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)$.

137. $\sin x=\pm\frac{a\sin\alpha-b\cos\beta}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\sin(\alpha+\beta)}}$.

138. $\operatorname{tg}x=\frac{\sin\beta\sin(\gamma-\alpha)}{\sin\alpha\cos(\gamma+\alpha)}$, гдѣ $\operatorname{tg}\gamma=\frac{m}{n}$. **139.** $\operatorname{tg}(\alpha-2x)=\frac{n-m}{n+m}\operatorname{tg}\alpha$.

140. $\operatorname{tg}x=\pm\sqrt{\frac{a-2\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha(a\operatorname{tg}\alpha+2)}}$. **141.** $\operatorname{tg}x=\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{a}{\operatorname{tg}\alpha}-1}$.

142. $\operatorname{tg}x=\frac{1+ab}{a+b}\pm\sqrt{\left(\frac{1+ab}{a+b}\right)^2+1}$.

143. $\sin x=\pm\sqrt{\frac{ab+1\pm\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}}{2}}$.

144. $\cos x=\pm\sqrt{\frac{ab+1\pm\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}}{2}}$.

145. $x=\sec\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)$ и $x=-\cos\frac{\beta}{2}\sec\alpha$. **146.** $\sin 2^x\alpha=\sin 3\alpha$.

147. $\cos x = \pm\sqrt{\frac{a - 2\sin^2\alpha}{2\cos 2\alpha}}$. **148.** $\cos x = 1$ и $\cos x = \pm\cos\alpha \pm \sqrt{2}$.

149. $\cos x = \pm\frac{\sin^2\alpha - \sin^2\beta - \sin^2\gamma}{2\sin\beta\sin\gamma}$. **150.** $n = 2$.

151. Данное урав. можно представить такъ: $\sin^3\frac{x-\alpha}{2}\sin\frac{3x+\alpha}{2} = 0$; откуда $x = (2n+1)\pi + \alpha$ и $3x = (2n+1)\pi + \alpha$.

153. $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{0,26}$; $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{0,76}$; $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\frac{13}{38}}$;

154. $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{5}{7}}$; $\cos\alpha = -\sqrt{\frac{2}{7}}$; $\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{2,5}$.

155. $\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\frac{a+b}{2\sqrt{a^2+b^2}}$; $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\frac{a-b}{a+b}$; $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \pm\frac{a+b}{a-b}$.

156. $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{0,9}$; $\cos\alpha = \sqrt{0,1}$; $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 3$.

157. $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{6}(\sqrt{15} - \sqrt{3})$; $\cos\frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{6}(\sqrt{15} + \sqrt{3})$; $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 3)$.

158. $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{10+\sqrt{2}}{20}}$; $\cos\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{10-\sqrt{2}}{20}}$; $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = -\frac{10+\sqrt{2}}{98}$.

159. $\cos\alpha = 0,68$; $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{338} : 17$.

160. $\operatorname{ctg}\alpha = \pm\frac{3}{4}$; $\sec\alpha = \pm\frac{5}{3}$. **161.** $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{5}$; $\sin\alpha = \sqrt{\frac{1}{26}}$; $\cos\alpha = \sqrt{\frac{25}{26}}$.

162. $\sin 7\frac{1}{2}^0 = \sqrt{(2\sqrt{2} - \sqrt{3} - 1) : 4\sqrt{2}}$; $\cos 7\frac{1}{2}^0 = \sqrt{(2\sqrt{2} + \sqrt{3} + 1) : 4\sqrt{2}}$;

$\operatorname{tg} 7\frac{1}{2}^0 = \sqrt{6} + \sqrt{2} - \sqrt{3} - 2$.

163. $\sin 67^0 30' = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$; $\cos 67^0 30' = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$; $\operatorname{tg} 67^0 30' = \sqrt{2} - 1$.

164. Замѣтивъ, что $3^0 = 30^0 + 18^0 - 45^0$, найдемъ:

$\sin 3^0 = \frac{1}{16}[(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-1) - 2(\sqrt{3}-1)\sqrt{5+\sqrt{5}}]$.

167. $2\sin\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{1+\sin\alpha} - \sqrt{1-\sin\alpha}$. **168.** $\left(2n+\frac{3}{4}\right)\pi$ и $\left(2n+\frac{5}{4}\right)\pi$.

169. $\left(2n+\frac{5}{4}\right)\pi$ и $\left(2n+\frac{7}{4}\right)\pi$. **170.** $\left(2n-\frac{1}{4}\right)\pi$ и $\left(2n+\frac{1}{4}\right)\pi$.

172. $\cos x = -1$ и $(b^2 - 2a^2) : 2a^2$. **173.** $\frac{1}{2}x = n\pi$ и $\left(2n \pm \frac{1}{3}\right)\pi$.

174. $\cos x = 1$ и $\sin x = \pm\frac{b}{a}$. **175.** $x = \left(2n \pm \frac{1}{6}\right)\pi$.

176. $x = \frac{1}{4}(2n+1)\pi$. **177.** $\operatorname{tg} x = \pm 1$. **178.** $\sqrt{(c-1):(c+1)}$.

200. $m^2n^2(m^2+n^2+3) = 1$. **201.** $n + 2m = m^2 n$. **202.** $m^2 + 2m = n^2$.

203. $n^2(m^2-1)^4 + 1 = n^2(m^2-1)^2$. **204.** $3m = m^3 + 2n$.

205. $a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2$. **206.** $b^2 = a^2 - 2ac\cos 2\psi + c^2$. **209.** $a^2 = b^2$.

210. $a^2 + b^2 - 2c = 2$. **211.** $ab\operatorname{ctg}\alpha = b - a$. **212.** $b^2(x^2+y^2) = a^2(b^2+y^2)$.

213. $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$. **214.** $\operatorname{tg}^2\alpha = \operatorname{tg}^2\beta + \operatorname{tg}^2\gamma$.

Отдѣлъ IV. **1.** $\frac{1}{2}$. **2.** $\frac{m}{n}$. **3.** $\frac{m}{n}$. **4.** -2. **5.** $\frac{1}{2}$. **6.** 1. **7.** 8. **8.** $\cos a$.
9. $-\sin a$. **10.** $1+\mathrm{tg}^2 a$. **11.** $-(1+\mathrm{ctg}^2 a)$. **12.** $\frac{\sin a}{\cos^2 a}$. **13.** $-\frac{\cos a}{\sin^2 a}$.
14. $\frac{2}{\pi}$. **15.** $-\frac{1}{2\sqrt{3}}$.

Отдѣлъ VI. **1.** 9,4763079. **2.** 9,9671982. **3.** 9,8289764. **4.** 9,9123589. **5.** 9,1663202. **6.** 9,9498530. **7.** 9,4224097. **8.** 9,8784035. **9.** 9,6714807. **10.** 9,9015527. **11.** 9,3369460. **12.** 9,9363824. **13.** 0,4419771. **14.** 9,8920176. **15.** 7,7755554. **16.** 9,6280626. **17.** 9,7740711. **18.** 0,0609528. **19.** 9,3629407. **20.** 1,5913428. **21.** 0,1077328. **22.** 0,1034611. **23.** 9,4188304. **24.** $9{,}9374949_n$. **25.** $8{,}5631993_n$. **26.** 9,5517824. **27.** $0{,}7289352_n$. **28.** 0,9170096. **29.** 24°26′57″,93. **30.** 49°47′44″,61. **31.** 64°28″,16. **32.** 1°5′40″,51. **33.** 5°44′21″,01. **34.** 16°37′12″,58. **35.** 58°22″,82. **36.** 75°56′45″,67. **37.** 35°54′31″,45. **38.** 45°4′7″,54. **39.** 30°25′36″,97. **40.** 57°15′45″,79. **41.** 44°59′28″,03. **42.** 88°44′48″,14. **43.** 2°53′40″,01. **44.** 31°13′17″,1. **45.** 49°33′59″,74. **46.** 16°14′26″,02. **47.** 78°25′4″,02. **48.** 21′10″,29. **49.** 9°31′38″,86. **50.** 5°44′16″,32. **51.** 8,8742655. **52.** 8,4465507. **53.** 7,9363253. **54.** 8,5785665. **55.** 8,8426586. **56.** 8,5234507. **57.** 8,8993709. **58.** 7,6398561. **59.** 8,1012723. **60.** 8,7175310. **61.** 4°17′36″. **62.** 1°36′8″,096. **63.** 2°48″,29. **64.** 87°49′42″. **65.** 88°58′10″,14. **66.** 89°40′59″,706. **67.** 1°54′42″. **68.** 15′0″,0746. **69.** 89°16′35″,8. **70.** 86°30′30″,061. **71.** 8,4109485. **72.** 8,0632807. **73.** 6,4041413. **74.** 8,1207056. **75.** 8,5410568. **76.** 8,5446953. **77.** 8,0492907. **78.** 6,2952611. **79.** 8,5798508. **80.** 8,5235428. **81.** 1°28′34″. **82.** 15′8″,0925. **83.** 89°14′36″,4. **84.** 89°59′19″,676. **85.** 1°49′48″,7. **86.** 40″,7086. **87.** 88°5′16″,54. **88.** 89°27″,086. **89.** 0,6668071. **90.** 0,9816720. **91.** 0,5158731. **92.** 0,8864641. **93.** 0,4760416. **94.** 7,128021. **95.** 3,113122. **96.** 0,07100617. **97.** 1,9416108. **98.** 1,1033363. **99.** 0,5333554. **100.** −0,8480465. **101.** −1,0956244. **102.** −0,3797518. **103.** −0,9834953. **104.** −0,1909954. **105.** 0,4631388. **106.** 1,035523. **107.** 46°33′7″,55. **108.** 27°49′54″,34. **109.** Нѣтъ. **110.** 51°41′1″,91. **111.** 60°56′26″,57. **112.** 79°54′38″,22. **113.** 84°32′6″,11. **114.** 39°22′7″,72. **115.** 49′6″,458. **116.** 87°26′46″,68. **117.** 34°56′52″,84. **118.** 19°28′16″,4. **119.** 215°5′58″,66. **120.** 108°36′41″,26. **121.** 120°27′55″,97. **122.** 164°21′27″,92. **123.** 123°44′56″,35. **124.** 185°44′21″,01. **125.** 208°2′3″,48 и 331°57′56″,22. **126.** 72°10′27″,45 и 287°49′32″,55. **127.** 101°18′35″,76 и 281°18′35″,76. **128.** 54°7′4″,89 и 234°7′4″,89. **129.** 109°28′16″,22 и 250°31′43″,78. **130.** 13°17′25″,1 и 166°42′34″,9. **131.** 404°25′37″,21 и 495°34′22″,79. **132.** 204°13′0″,42 и 515°46′59″,58. **133.** 243°56′7″,2 и 423°56′7″,2. **134.** 354°17′21″,87 и 534°17′21″,87. **135.** 277°17″,01 и 442°59′42″,99. **136.** 194°28′40″,96 и 345°31′19″,04. **137.** 26,42778. **138.** 0,05677368. **139.** 0,3369526. **140.** 0,06103941. **141.** 1,0564895. **142.** 0,35379926. **143.** 0,2739387. **144.** 0,9317083. **145.** 0,9101625. **146.** 0,4441534. **147.** 0,9971351. **148.** −0,9580007. **149.** 0,024979. **150.** 2,692423. **151.** 1,08779. **152.** 0,8843639. **153.** 1,2191546.

154. 0,1488225. **155.** 0,8583525. **156.** 0,826141. **157.** 0,2088575.
158. 5,325811. **159.** 2,059528. **160.** 0,8066363. **161.** 0,2734893.
162. 0,002545031. **163.** 0,5616135. **164.** 0,8282442. **165.** 0,3744928.
166. 0,4082916. **167.** 0,1798375. **168.** 0,2657028. **169.** 1,035244.
170. 0,07267254. **171.** 0,2298819. **172.** 3,247426. **173.** 0,1667924.
174. 0,06383906. **175.** 71°43′39″,78. **176.** 12°48′40″,98. **177.** 54°32′1″,77.
178. 161°46′14″,08. **179.** 23°5′34″,57. **180.** 74°2′0″,72. **181.** 205°20′49″,8.
182. 135°34′7″,17. **183.** 85°37′29″,13. **184.** 81°22′43″,67. **185.** 44°30′24″,25.
186. 36°51′25″,13. **187.** 46°25′53″,78. **188.** 78°59′48″,78. **189.** 42°2′29″,27.
190. 12°34′39″,36. **191.** 45°36′29″,74. **192.** 50°28′10″,92. **193.** 26°29′16″,79.
194. 62°3′26″,94. **195.** 35°30′0″,38. **196.** 22°20′7″,15. **197.** 57°30′44″,65.
198. 61°48′3″,24. **199.** 11°46′9″,07. **200.** 86°46′56″,27. **201.** 34°7′18″,32.
202. 57°25′40″,75. **203.** 18°37′55″,68. **204.** 43°10′0″,31. **205.** 33°21′1″,76.
206. 29°15′. **207.** 13°31′30″,59. **208.** 74°15′36″,12. **209.** 32°31′20″,52.
210. 72°54′55″,8. **211.** 0,5493554. **212.** 3,034766. **213.** 0,5621531.
214. 0,9122212. **215.** 0,8409857. **216.** 0,9952418. **217.** 0,9799175.
218. 0,9999788. **219.** 0,9125555. **220.** $2n\pi + 54°11′58″,73$.
221. $n\pi + 88°14′32″,43$. **222.** $n\pi + (-1)^n . 41°55′43″,53$. **223.** 9,66766.
224. 9,88611. **225.** 9,72436. **226.** 9,68951. **227.** 9,97932. **228.** 9,83305.
229. 9,74751. **230.** 8,66597. **231.** 9,93704. **232.** 0,90374. **233.** 0,05762.
234. 8,53676. **235.** 1,01691. **236.** 0,31173. **237.** 9,93702. **238.** 9,21432.
239. 0,11762. **240.** 0,06241. **241.** 9,41883. **242.** $9{,}97360_n$. **243.** $8{,}72064_n$.
244. 9,80962. **245.** 9,39939. **246.** $0{,}47037_n$. **247.** 41°36″. **248.** 57°5′45″.
249. 66°54′50″. **250.** 22°48′20″. **251.** 87°34″. **252.** 5°53′30″. **253.** 32°42′36″.
254. 45°13′49″. **255.** 2°55′48″. **256.** 9°44′22″. **257.** 36°15′29″. **258.** 50°14′7″.
259. 66°16′33″. **260.** Невозм. **261.** 4°37′38″. **262.** 8,41095. **263.** 8,06331.
264. 6,37024. **265.** 8,54397. **266.** 7,82681. **267.** 8,01744. **268.** 8,54467.
269. 6,06958. **270.** 8,61406. **271.** 49′37″,64. **272.** 1°21′31″,8. **273.** 55″,871.
274. 88°2′30″,3. **275.** 89°26′56″,5. **276.** 2°1′38″,8. **277.** 17′37″,8. **278.** 89°49′6″,6.
279. 88°17′38″,1. **280.** 0,86996. **281.** 0,52461. **282.** 0,66629. **283.** 0,059213.
284. 0,069989. **285.** 1,7212. **286.** 0,19140. **287.** 6,8875. **288.** 1,7887.
289. 1,0151. **290.** 0,5333. **291.** — 0,8557. **292.** — 0,14707. **293.** — 0,93964.
294. — 2,1435. **295.** — 0,19476. **296.** 0,17521. **297.** — 0,9835. **298.** — 0,19099.
299. 0,46317. **300.** 0,80964. **301.** 40°33′10″. **302.** 2°59′37″. **303.** 28°2°13″.
304. 34°55′. **305.** 67°48′13″. **306.** 84°58′48″. **307.** 42°6′51″. **308.** 79°54′39″.
309. 49′7″. **310.** 87°26′47″. **311.** 34°56′53″. **312.** 19°28′17″. **313.** 215°6′.
314. 108°36′41″. **315.** 120°27′56″. **316.** 164°21′28″. **317.** 92°7′28″. **318.** Нѣтъ.
319. 208°2′5″ и 331°57′55″. **320.** 72°10′28″ и 287°49′32″. **321.** 101°18′35″ и 281°18′35″. **322.** 54°7′4″ и 234°7′4″. **323.** 109°28′17″ и 250°31′43″.
324. 13°17′25″ и 166°42′35″. **325.** 0,42888. **326.** — 0,57638. **327.** — 1,67576.
328. 13,2389. **329.** 26,427. **330.** 0,056774. **331.** 0,33697. **332.** 0,06104.
333. 1,0565. **334.** 0,35381. **335.** 0,80248. **336.** 0,27393. **337.** 0,9317.
338. 0,91016. **339.** 0,44427. **340.** 0,99713. **341.** — 0,958. **342.** 0,96542.
343. 0,025. **344.** 2,69243. **345.** 0,50717. **346.** 1,0878. **347.** 0,8845.
348. 0,73702. **349.** 0,85834. **350.** — 0,99908. **351.** 0,20885. **352.** 5,3258.

353. 0,10279. **354.** 0,80664. **355.** 0,2735. **356.** 0,68049. **357.** 1,0526. **358.** 0,002545. **359.** 2,0311. **360.** 0,82824. **361.** 0,30001. **362.** 0,3745. **363.** 0,53809. **364.** 0,15283. **365.** 0,50457. **366.** 0,26570. **367.** 0,83070. **368.** 1,03524. **369.** 0,22991. **370.** 3,2474. **371.** 0,16662. **372.** — 0,78647. **373.** 1,0004. **374.** $71^0 42' 38''$. **375.** $12^0 48' 41''$. **376.** $56^0 22' 30''$. **377.** $161^0 46' 14''$. **378.** $23^0 5' 36''$. **379.** $74^0 1' 50''$. **380.** $135^0 34' 10''$. **381.** $85^0 37' 27''$. **382.** $44^0 30' 24''$. **383.** $36^0 51' 27''$. **384.** $46^0 25' 53''$. **385.** $78^0 59' 40''$. **386.** $12^0 34' 40''$. **387.** $45^0 36' 29''$. **388.** $50^0 28' 12''$. **389.** $62^0 3' 17''$. **390.** $11^0 46' 9''$. **391.** $22^0 20' 6''$. **392.** $57^0 30' 45''$. **393.** $86^0 46' 56''$. **394.** $47^0 40' 12''$. **395.** $84^0 46'$. **396.** $81^0 51' 31''$. **397.** $33^0 21' 2''$. **398.** $43^0 54' 38''$. **399.** $57^0 25' 38''$. **400.** $54^0 25' 33''$. **401.** $11^0 16' 54''$. **402.** $136^0 16' 43''$.

Отдѣлъ VII. 1. $2 \sin 39^0 30' . \cos 22^0 30'$. **2.** $2 \sin 15^0 59' 51'' . \cos 32^0 9''$.

3. $2 \sin 50^0 39' 23'' . \sin 1^0 38' 37''$. **4.** $2 \sin 52^0 59' 10'',5 . \cos 20^0 59' 10'',5$.

5. $4 \cos 45^0 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \left(45^0 - \frac{\alpha}{2} \right)$. **6.** $\sin (A + B) \sin (A - B)$.

7. $-\sin (A + B) \sin (A - B)$. **8.** $-\cos (\alpha - \beta) \cos (\alpha + \beta)$.

9. $\frac{\sin (A \pm B)}{\cos A \cos B}$. **10.** $\frac{\sin (B \pm A)}{\sin A \sin B}$. **11.** $\frac{\sin (A + B) \sin (A - B)}{\cos^2 A \cos^2 B}$.

12. $-\frac{\sin (A + B) \sin (A - B)}{\sin^2 A \sin^2 B}$. **13.** Положивъ $\operatorname{tg} \varphi = \frac{a}{b \sin \alpha}$, найдемъ: $x = \operatorname{tg} (\varphi - 45^0)$. **14.** Положивъ $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b \sin \beta \sin \gamma}{a \sin \alpha}$, найдемъ: $x = \frac{b\sqrt{2} \sin \beta \cos (45^0 - \varphi)}{c \sin \varphi}$. **15.** Положивъ $\frac{b}{a} = \cos \varphi$, получимъ: $x = 2\sqrt{a} \cos (\varphi - 45^0)$. **16.** Положивъ $\frac{b}{a} = \sin \varphi$, получ. $x = 2 \sec \varphi$. **17.** Положивъ $b = a \operatorname{tg} \varphi$, найдемъ: $x = \frac{2a \cos^2 \frac{1}{2} \varphi}{\cos \varphi}$, когда беремъ + передъ корнемъ и $x = -\frac{2a \sin^2 \frac{1}{2} \varphi}{\cos \varphi}$, когда беремъ — передъ корнемъ

18. Положивъ $b = a \sin \varphi$, получимъ: $x = a\sqrt{2} \sin (\varphi \pm 45^0)$.

19. $2 \operatorname{tg} \alpha \cos \left(45^0 - \frac{\alpha}{2} \right)$. **20.** $Э = 5^0 46' 6'',52 + n\pi$. **21.** $Э = 2n\pi - 39^0 14' 14'',4$.

22. $x = 2n . 180^0 + 19^0 39' 6'',91$; $y = 2n . 180^0 + 3^0 39' 6'',91$.

23. $x = 2n . 180^0 + 31^0 34' 8'',93$; $y = -2n . 180^0 + 41^0 14' 7'',07$.

24. $x = n . 180^0 + 15^0 11' 23'',68$; $y = n . 180^0 + 1^0 5' 36'',32$.

25. $x = n\pi + 47^0 4' 52'',225$; $y = n\pi + 17^0 4' 10'',225$.

26. $x = n\pi + 30^0 30' 35'',68$; $y = -n\pi + 7^0 52' 39'',36$.

27. $x = 1,1220096$. **28.** $x = 0,3311016$. **29.** $x = 0,8956794$ и $0,007201238$.

30. $x = 0,3951657$ и $4,946501$. **31.** $x = 9,4337$ и $-369,8537$.

32. $x = 0,3734017$ и $-0,0489018$. **33.** $x = -0,250781$ и $-3,377174$.

34. $x = 1,231726$ и $-822,2009$. **35.** $x = -0,0522722$ и $-1169,021$.

36. $x = 2n\pi - 30^0 7' 8'',84$ и $x = 2n\pi + 152^0 44' 4'',28$. **37.** $x = 2 \cos 20^0, -2 \sin 10^0$ и $-2 \cos 40^0$. **38.** $x = 1,692021, -3,048917$ и $1,356896$.

39. $x = -3,931026$, $x = 1,960513 \pm 0,8475501 . \sqrt{-1}$.

40. $x = 2,531642$, $x = -1,198309 \pm 1,129279 . \sqrt{-1}$.

41. $x = -1$, $\sqrt{3} - 4$ и $-\sqrt{3} - 4$. **42.** Означимъ буквою x разстояніе отъ центра полушара до плоскости сѣченія; тогда искомое уравненіе будетъ: $x^3 - 3x + 1 = 0$; откуда $x = 0{,}3472964$ арш.

43. Означивъ буквою x искомый радіусъ, найдемъ уравненіе: $x^3 - {}^7/_2\,x - {}^3/_2 = 0$; откуда $x = 2{,}056546$ фута.

Отдѣлъ IX. 1. $B = 41^0 21'$; $a = 28{,}52614$; $b = 25{,}10497$.

2. $a = 30{,}05948$; $b = 95{,}37518$; $B = 72^0 30' 24''$.

3. $a = 415{,}6359$; $b = 240{,}0975$; $A = 59^0 59' 11''{,}6$.

4. $a = 36{,}29673$; $b = 44{,}31191$; $A = 50^0 40' 42''{,}4$.

5. $a = 1{,}904045$; $b = 4{,}130904$; $B = 65^0 15' 13''{,}5$.

6. $a = 0{,}0002747$; $b = 0{,}0004926$; $A = 29^0 8' 31''{,}81$.

7. $a = 0{,}04135724$; $b = 0{,}07410853$; $B = 50^0 50' 8''{,}62$.

8. $a = 218710{,}9$; $b = 330469$; $A = 33^0 29' 50''{,}53$.

9. $a = 0{,}6898892$; $b = 0{,}08234992$; $A = 83^0 11' 34''{,}76$.

10. $a = 2{,}180206$; $b = 1{,}721264$; $A = 51^0 42' 32''{,}56$.

11. $b = 82{,}16447$; $A = 34^0 45' 0''{,}83$; $B = 55^0 14' 59''{,}17$.

12. $b = 5102{,}258$; $A = 41^0 50' 38''{,}38$; $B = 48^0 9' 21''{,}62$.

13. $a = 1{,}368947$; $A = 70^0 45' 7''{,}74$; $B = 19^0 14' 52''{,}26$.

14. $a = 10{,}94503$; $B = 65^0 47' 42''{,}59$; $B = 24^0 12' 17''{,}41$.

15. $a = 16{,}56247$; $A = 19^0 6' 22''{,}5$; $B = 70^0 53' 37''{,}5$.

16. $b = 0{,}0011147$; $A = 37^0 13' 43''{,}83$; $B = 52^0 46' 16''{,}17$.

17. $b = 107303{,}1$; $A = 27^0 57' 21''{,}46$; $B = 62^0 2' 38''{,}54$.

18. $a = 0{,}9998981$; $A = 89^0 10' 55''{,}09$; $B = 49' 4''{,}91$.

19. $a = 0{,}5117391$; $A = 32^0 36' 21''{,}49$; $B = 57^0 23' 38''{,}51$.

20. $b = 1{,}112842$; $A = 26^0 54' 44''{,}48$; $B = 63^0 5' 15''{,}52$.

21. $b = 7{,}681146$; $A = 75^0 9' 53''{,}6$; $B = 14^0 50' 6''{,}4$.

22. $a = 0{,}1001368$; $A = 11^0 33' 10''{,}66$; $B = 78^0 26' 49''{,}34$.

23. $b = 2{,}223215$; $A = 82^0 29' 7''{,}74$; $B = 7^0 30' 52''{,}26$.

24. $a = 0{,}01093889$; $A = 7^0 51' 33''{,}5$; $B = 82^0 8' 26''{,}5$.

25. $b = 165{,}2727$; $C = 181{,}494$; $B = 65^0 35' 30''$.

26. $b = 455{,}7333$; $C = 603{,}7456$; $A = 40^0 59' 18''$.

27. $a = 535{,}3354$; $C = 1134{,}248$; $A = 28^0 9' 32''{,}2$.

28. $a = 2{,}249404$; $C = 2{,}649494$; $B = 31^0 53' 51''{,}36$.

29. $b = 0{,}0068659$; $C = 0{,}0069384$; $B = 81^0 42' 47''{,}92$.

30. $b = 0{,}5852281$; $C = 1{,}025545$; $A = 55^0 12' 15''{,}74$.

31. $a = 0{,}493477$; $C = 0{,}5020198$; $A = 79^0 25' 12''{,}63$.

32. $a = 147006{,}4$; $C = 451481{,}8$; $B = 70^0 59' 51''{,}16$.

33. $b = 72{,}617$; $C = 90{,}80963$; $B = 53^0 5' 52''{,}16$.

34. $a = 0{,}0946867$; $C = 0{,}579606$; $A = 9^0 24' 7''{,}93$.

35. $c = 106{,}8317$; $A = 35^0 28' 31''{,}19$; $B = 54^0 31' 28''{,}81$.

36. $c = 18{,}42525$; $A = 54^0 29' 54''{,}49$; $B = 35^0 30' 5''{,}51$.

37. $c = 0{,}1529598$; $A = 18^0 33' 54''{,}9$; $B = 71^0 26' 5''{,}1$.

38. $c = 3{,}652165$; $A = 55^0 13' 41''{,}78$; $B = 34^0 46' 18''{,}22$.

39. $c = 148727{,}6$; $A = 2^0 6' 25''{,}08$; $B = 87^0 53' 34''{,}92$.

40. $c = 1{,}021981$; $A = 15^0 54' 3''{,}96$; $B = 74^0 5' 56''{,}04$.

41. $c = 4{,}176819$; $A = 16^0 41' 46'',94$; $B = 37^0 18' 13'',06$.
42. $c = 0{,}1818742$; $A = 28^0 23' 25'',1$; $B = 61^0 36' 34'',9$.
43. $c = 14{,}2922$; $A = 45^0 48' 0'',45$; $B = 44^0 11' 59'',55$.
44. $c = 0{,}0294698$; $A = 16^0 33' 39'',92$; $B = 73^0 26' 20'',08$.
45. $a = 4{,}5$; $c = 4{,}5\sqrt{2}$; $B = 45^0$. **46.** $b = 10\sqrt{3}$; $c = 20$; $A = 30^0$.
47. $a = 0{,}28$; $b = 0{,}28\sqrt{3}$; $B = 60^0$. **48.** $a = 6\sqrt{3}$; $A = 60^0$; $B = 30^0$;
49. $a = 4(\sqrt{2} - 1)$; $c = 4\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$; $A = 67^0 30'$. **50.** $a = 5\sqrt{2 - \sqrt{3}}$; $b = 5\sqrt{2 + \sqrt{3}}$; $B = 75^0$. **51.** $c = 4$; $A = 30^0$; $B = 60^0$.
52. $b = 10{,}93252$; $h = 13{,}17937$; $B = 45^0 3' 12''$.
53. $b = 2{,}450222$; $h = 0{,}9801405$; $B = 102^0 40' 38'',8$.
54. $b = 0{,}193149$; $h = 0{,}2271995$; $A = C = 66^0 58' 16'',91$.
55. $a = 0{,}2713301$; $h = 0{,}1356283$; $B = 120^0 1' 4'',6$.
56. $a = 0{,}665354$; $h = 0{,}1206705$; $B = 159^0 6' 6'',08$.
57. $a = 335{,}6585$; $h = 324{,}0278$; $A = C = 74^0 52' 22'',64$.
58. $h = 0{,}885811$; $B = 45^0 53' 23'',46$; $A = C = 67^0 3' 18'',27$.
59. $h = 0{,}6693228$; $B = 114^0 39' 50'',52$; $A = C = 32^0 40' 4'',74$.
60. $b = 0{,}0920441$; $B = 136^0 12' 30'',42$; $A = C = 21^0 53' 44'',79$.
61. $a = 9{,}261528$; $B = 115^0 14' 15'',8$; $A = C = 32^0 22' 52'',1$.
62. $a = c = 1{,}630002$; $b = 2{,}651002$; $B = 108^0 49' 3'',1$.
63. $a = c = 1258{,}52$; $b = 1121{,}126$; $A = C = 63^0 33' 0'',47$.
64. $b = 2{,}03823$; $c = 2{,}391315$; $A = 68^0 44' 15'',6$.
65. $b = 2{,}13067$; $c = 0{,}995424$; $A = 110^0 35' 30''$.
66. $a = 0{,}3440775$; $b = 0{,}325561$; $C = 11^0 16' 52'',14$.
67. $b = 9{,}092525$; $c = 5{,}614978$; $A = 87^0 18' 20'',3$.
68. $a = 2{,}516562$; $c = 2{,}216517$; $B = 19^0 30' 58'',2$.
69. $a = 1{,}524989$; $c = 0{,}565662$; $A = 112^0 40' 3'',74$.
70. $b = 19{,}3587$; $c = 28{,}40575$; $A = 140^0 7' 57'',55$.
71. $a = 4{,}484422$; $b = 2{,}608649$; $A = 93^0 32' 25'',2$.
72. $a = 2{,}273478$; $c = 3{,}335401$; $C = 117^0 58' 41''$.
73. $b = 5552{,}145$; $c = 5257{,}557$; $C = 39^0 54' 33''$.
74. $c = 4{,}991293$; $A = 97^0 58' 48'',37$; $B = 52^0 23' 47'',63$.
75. $c = 280{,}7817$; $A = 112^0 29' 55'',06$; $B = 18^0 44' 41'',08$.
76. $b = 1{,}804414$; $A = 45^0 21' 21'',2$; $C = 90^0 42' 0'',8$.
77. $c = 2{,}765869$; $A = 14^0 6' 36'',17$; $B = 14^0 5' 30'',77$.
78. $a = 10{,}81321$; $B = 43^0 38' 49'',27$; $C = 67^0 27' 25'',23$.
79. $c = 0{,}1144694$; $A = 48^0 59' 20'',81$; $C = 123^0 43' 2'',59$.
80. $b = 15{,}36485$; $A = 56^0 41' 46'',83$; $C = 31^0 13' 15'',37$.
81. $c = 1{,}4085084$; $A = 9^0 53' 49'',39$; $B = 22^0 5' 42'',21$.
82. $a = 43{,}68239$; $B = 84^0 29' 45'',21$; $C = 45^0 29' 29'',79$.
83. $b = 8{,}934151$; $A = 112^0 17' 43'',65$; $C = 23' 59'',05$.
84. $A = 133^0 8' 48'',76$; $B = 18^0 5' 15'',06$; $C = 28^0 45' 56'',16$.
85. $A = 95^0 3' 30'',42$; $B = 41^0 36' 39'',72$; $C = 43^0 19' 49'',84$.
86. $A = 36^0 46' 47'',88$; $B = 65^0 31' 4'',18$; $C = 77^0 42' 7'',96$.
87. $A = 19^0 42' 33'',62$; $B = 24^0 53' 26'',04$; $C = 135^0 24' 0'',34$.

88. $A = 114^0 42' 42'',9$; $B = 40^0 53' 59'',16$; $C = 24^0 23' 17'',96$.
89. $A = 18^0 58' 33'',18$; $B = 122^0 8' 5'',86$; $C = 38^0 53' 20'',96$.
90. $A = 73^0 19' 12'',38$; $B = 50^0 34' 50'',22$; $C = 56^0 5' 57'',42$.
91. $A = 26^0 45' 9'',64$; $B = 80^0 16' 37'',98$; $C = 72^0 58' 12'',38$.
92. $A = 30^0 22' 47'',55$; $B = 138^0 12' 46'',04$; $C = 11^0 24' 26'',4$.
93. $A = 37^0 22' 1'',43$; $B = 87^0 12' 39'',93$; $C = 55^0 25' 18'',65$.
94. $A = 48^0 23' 42'',24$; $B = 72^0 31' 9'',68$; $C = 59^0 5' 8'',08$.
95. $A = 33^0 20' 8'',22$; $B = 56^0 12' 56'',8$; $C = 90^0 26' 54'',96$.
96. Невозможно. **97.** Невозможно.
98. $\cos A = \sqrt{\frac{25}{26}}$; $\cos B = -\sqrt{0,9}$; $\cos C = \sqrt{\frac{64}{65}}$.
99. $\cos A = \sqrt{\frac{9}{20}}$; $\cos B = \sqrt{\frac{4}{15}}$; $\cos C = \sqrt{\frac{1}{12}}$.
100. $c = 1243,932$; $A = 12^0 43' 35'',84$; $C = 145^0 40' 35'',76$.
101. $c = 2,534408$; $B = 43^0 47' 10'',86$; $C = 89^0 31'',14$.
102. $b = 15,79974$; $B = 90^0 51' 9'',04$; $C = 30^0 26' 34'',16$.
103. $a = 0,32442$; $B = 22^0 5' 42'',22$; $A = 9^0 53' 49'',38$.
104. $b = 120$; $B = 18^0 44' 41'',1$; $C = 48^0 45' 23'',84$.
105. $b = 99,9998$; $B = 41^0 2' 0'',83$; $C = 15^0 17' 21'',01$.
106. $c = 0,1031408$; $B = 48^0 46' 0'',92$; $C = 50^0 51' 51'',93$.
107. $c = 576,9367$; $A = 30^0 16' 28'',84$; $C = 124^0 16' 43'',36$ или
$c = 58,76241$; $A = 149^0 43' 31'',16$; $C = 4^0 49' 41'',04$.
108. $c = 13,83269$; $A = 44^0 3' 33'',64$; $C = 97^0 41' 57'',19$ или
$c = 1,414937$; $A = 135^0 56' 26'',36$; $C = 5^0 49' 4'',47$.
109. $b = 409,7873$; $B = 121^0 33' 54'',24$; $C = 34^0 2' 21'',48$ или
$b = 80,45593$; $B = 9^0 38' 37'',2$; $C = 145^0 57' 38'',52$.
110. Невозможно. **111.** Задача невозможна. **112.** Задача невозможна.
113. $a = 15\sqrt{2}$; $c = 15(\sqrt{3} + 1)$; $B = 45^0$.
114. $b = 6,4\sqrt{6}$; $c = 6,4(\sqrt{3} + 1)$; $C = 75^0$.
115. $b = 15\sqrt{2} + 5\sqrt{6}$. **116.** $c = 8\sqrt{3}$; $A = 30^0$; $B = 90^0$.
117. $a = 3$; $C = 45^0$; $B = 90^0$. **118.** $c = 2$; $A = 15^0$; $B = 30^0$.
119. $b = 4(\sqrt{3} - 1)$; $A = 45^0$; $C = 120^0$.
120. $A = 45^0$; $B = 75^0$; $C = 60^0$. **121.** $A = 45^0$; $B = 15^0$; $C = 120^0$.
122. $2a \sin \frac{1}{2}\alpha = 1282,111$ ар.; $2a \cos \frac{1}{2}\alpha = 3500,596$.
123. $d \sin \frac{1}{2}\alpha = 0,2648388$; $d \cos \frac{1}{2}\alpha = 0,7080934$; $\frac{1}{2}d^2 \sin\alpha = 0,1875306$.
124. $a\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,10^0 = 305,4073$; $\frac{1}{2}a(1 - \sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,10^0) = 347,2963$; $a\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,10^0$.
125. $2r \sin \frac{1}{2}\alpha = 194$; $r \cos \frac{1}{2}\alpha = 78,84165$.
126. $r = a : 2 \sin \frac{\alpha}{2} = 31,59155$. **127.** $r = a \sin \frac{1}{2}\alpha = 0,4328108$.
128. $\cos \frac{1}{2}\alpha = a : 2r$; $\alpha = 144^0 40' 41'',88$. **129.** 2,10574 метра.
130. Болѣе 5656, 854 саж. **131.** 1) $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{R - r}{a}$; 2) $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{R + r}{a}$.

132. $\cos A = \sqrt{\frac{1}{m}}$; $A = 85^0 14' 11'',01$. **133.** $a : 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$.

134. $R\cos\varphi = 781{,}2635$ мил. **135.** $\cos\varphi = 180\,a : \pi R$; $26^0 3'$ сѣв. или южн. широты. **136.** $\frac{r(b-a)\pi\cos\varphi}{180}$. **137.** I) $s = \pi r^2 \sec\alpha$; $v = \frac{1}{3}\pi r^3 \operatorname{tg}\alpha$; II) $s = \frac{\pi h^2 \cos\alpha}{\sin^2\alpha}$; $v = \frac{1}{3}\pi h^3 \operatorname{ctg}^2\alpha$; III) $s = \frac{1}{2}\pi a^2 \sin 2\beta$; $v = \frac{1}{6}\pi a^3 \sin\beta \sin 2\beta$. **138.** $4\pi a^2 \sin^2\alpha \sin^2(45^0 - \frac{1}{2}\alpha)$.

139. $4\pi R^2 \sin\frac{1}{2}(\varphi - \varphi_1)\cos\frac{1}{2}(\varphi + \varphi_1) = 1246766$ □ мили.

140. $\frac{4}{3}\pi R^3 \sin^2\frac{1}{2}\alpha = 4{,}736165$ куб. фута. **141.** $c = s : 2\cos^2\frac{A}{2}$.

142. $\sin(A - 45^0) = \frac{d}{c\sqrt{2}}$. **143.** $\cos(45^0 - A) = \frac{s}{c\sqrt{2}}$.

144. 1) $c = \frac{s}{\sqrt{2}\cos(A - 45^0)}$; 2) $c = \frac{d}{\sqrt{2}\sin(A - 45^0)}$.

145. $c\sqrt{2}\cos\frac{A}{2}\cos\left(45^0 - \frac{A}{2}\right) = p$. **146.** $2c\sqrt{2}\sin\frac{A}{2}\sin\left(45^0 - \frac{A}{2}\right) = d$.

147. $c = s - 2r$; $\sin(45^0 + A) = s\sqrt{\frac{1}{2}} : (s - 2r)$.

148. $c = r : \sqrt{2}\sin\frac{A}{2}\sin\left(45^0 - \frac{A}{2}\right)$. **149.** I) $a\sin\left(45^0 - \frac{A}{2}\right) = r\sqrt{2}\cos\frac{A}{2}$; $r = c\sqrt{2}\sin\frac{A}{2}\sin\left(45^0 - \frac{A}{2}\right)$. **150.** $\frac{d\sin\psi}{\sin\alpha} = 6{,}552733$; $\frac{d\sin\varphi}{\sin\alpha} = 13{,}85051$.

151. 0,8752686; $125^0 26' 42'',81$. **152.** 4,822978; 13,35535.

153. Основ. = 0,6779295; одна изъ равн. стор. = 1,030649.

154. $38^0 34' 21'',62$. **155.** $\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{rr'}{(r + r' + r'')r''}}$.

156. $\sin(2\,ACY + \vartheta) = \frac{b}{2r}$, гдѣ $\sin\vartheta = \frac{a}{2r}$.

157. $r = \left(\frac{1}{2}a + b\right)\operatorname{cosec}\alpha - \sqrt{(a+b)b}\,.\operatorname{ctg}\alpha$.

158. $AB = 3{,}7543$; $CD = 7{,}8105$; $AD = 8{,}0726$; $A = 110^0 43'',8$; $B = 100^0 40' 23'',6$. **159.** $\cos\frac{1}{2}(A - B) = s\sin\frac{1}{2}C : c = \sin\left(B + \frac{1}{2}C\right)$.

160. $\sin\frac{1}{2}(A - B) = \frac{d}{c}\cos\frac{1}{2}C$. **161.** $a = s\sin A : 2\cos\frac{1}{2}C\sin\left(A + \frac{1}{2}C\right)$.

162. $c = d\cos\frac{1}{2}C : \sin(B - A)$. **163.** $\cos\frac{1}{2}C = (a + b)m : 2ab$.

164. $b = m\cos\frac{1}{2}(B - C) : \sin C$. **165.** $\operatorname{tg}\frac{1}{2}B = (s - c)\operatorname{ctg}\frac{1}{2}A : (s + c)$.

166. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}B = (c - d)\operatorname{tg}\frac{1}{2}A : (c + d)$. **167.** $a - b = s\operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta.\operatorname{tg}\frac{1}{2}C$.

168. $a + b = d\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\delta.\operatorname{ctg}\frac{1}{2}C$. **169.** $a = p\sin\frac{1}{2}A : \cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C$.

170. $a = d\cos\frac{A}{2} : 2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$. **171.** $\operatorname{tg}\frac{1}{2}B = h : \left(2p - h\operatorname{ctg}\frac{1}{2}A\right)$.

172. $2b\sin\frac{1}{2}(A-C)\cos\frac{1}{2}(A+C) = d$. **173.** $a + c = s : \sin B$;

$a - c = b\sin\frac{1}{2}(A-C) : \cos\frac{1}{2}B$.

174. $\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(h_a h_b + h_a h_c + h_b h_c)(h_a h_b + h_a h_c - h_b h_c)}{4h_a{}^2 h_b h_c}}$.

175. $s.\cos^2\frac{B-C}{2} - 2h\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2} - s\sin^2\frac{A}{2} = 0$.

176. $\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{a^2 - d^2}{2ah}$. **177.** $2h\sin(B + C + \varphi) = a\cos\delta\cos\varphi$, гдѣ $\operatorname{tg}\varphi = \frac{a}{2h}$.

178. $\sin\left(\frac{B-C}{2} - \varphi\right) = 2\sin\varphi\sin\frac{A}{2}$, гдѣ $\operatorname{tg}\varphi = \frac{s-t}{s+t}\operatorname{ctg}\frac{A}{2}$.

180. $v = 2abc\sqrt{\sin\delta\sin(\delta-\alpha)\sin(\delta-\beta)\sin(\delta-\gamma)}$, гдѣ $\alpha+\beta+\gamma = 2\delta$.

181. $a = 28{,}526$; $b = 25{,}105$; $B = 41^0 21'$.

182. $a = 30{,}059$; $b = 95{,}376$; $B = 72^0 30' 24''$.

183. $a = 415{,}63$; $b = 240{,}09$; $A = 59^0 59' 12''$.

184. $a = 36{,}597$; $b = 44{,}064$; $B = 50^0 42' 42''$.

185. $a = 1{,}904$; $b = 4{,}1308$; $B = 65^0 15' 13''$.

186. $a = 0{,}00027466$; $b = 0{,}00049261$; $A = 29^0 8' 32''$.

187. $a = 0{,}041357$; $b = 0{,}074108$; $B = 60^0 50' 9''$.

188. $a = 218760$; $b = 330546$; $A = 33^0 29' 51''$.

189. $a = 0{,}68989$; $b = 0{,}08235$; $A = 83^0 11' 35''$.

190. $a = 2{,}18025$; $b = 1{,}7213$; $A = 51^0 42' 33''$.

191. $b = 82{,}165$; $A = 34^0 45'$; $B = 55^0 15'$.

192. $a = 10{,}946$; $A = 65^0 47' 41''$; $B = 24^0 12' 19''$.

193. $a = 1{,}369$; $A = 70^0 45' 8''$; $B = 19^0 14' 52''$.

194. $b = 5102{,}2$; $A = 41^0 50' 39''$; $B = 48^0 9' 21''$.

195. $a = 16{,}563$; $A = 19^0 6' 24''$; $B = 70^0 53' 36''$.

196. $b = 0{,}0011147$; $A = 37^0 13' 42''$; $B = 52^0 46' 18''$.

197. $b = 107302$; $A = 27^0 57' 21''$; $B = 62^0 2' 39''$.

198. $a = 0{,}99988$; $A = 89^0 10' 55''$; $B = 49' 5''$.

199. $a = 0{,}51176$; $A = 32^0 36' 23''$; $B = 57^0 23' 37''$.

200. $b = 1{,}1128$; $A = 26^0 54' 45''$; $B = 63^0 5' 15''$.

201. $b = 7{,}681$; $A = 14^0 50' 6''$; $B = 75^0 9' 54''$.

202. $a = 0{,}10012$; $A = 11^0 33' 10''$; $B = 78^0 26' 50''$.

203. $b = 2{,}2232$; $A = 82^0 29' 8''$; $B = 7^0 30' 52''$.

204. $a = 0{,}010936$; $A = 7^0 51' 24''$; $B = 82^0 8' 36''$.

205. $b = 165{,}27$; $c = 181{,}49$; $B = 65^0 35' 30''$.

206. $b = 455{,}73$; $c = 603{,}76$; $A = 40^0 59' 18''$.

207. $a = 535{,}27$; $c = 1134{,}3$; $A = 28^0 9' 32''$.

208. $a = 2{,}2498$; $c = 2{,}6498$; $B = 31^0 53' 37''$.

209. $b = 0{,}0068661$; $c = 0{,}0069383$; $B = 81^0 42' 48''$.

210. $b = 0{,}58524$; $c = 1{,}0256$; $A = 55^0 12' 16''$.

211. $a = 0{,}49348$; $c = 0{,}50202$; $A = 79^0 25' 13''$.
212. $a = 147007$; $c = 454490$; $B = 70^0 59' 51''$.
213. $b = 72{,}6$; $c = 90{,}796$; $B = 53^0 5' 28''$.
214. $a = 0{,}094688$; $c = 0{,}5796$; $A = 9^0 24' 8''$.
215. $c = 106{,}83$; $A = 35^0 28' 31''$; $B = 54^0 31' 29''$.
216. $c = 18{,}425$; $A = 54^0 29' 56''$; $B = 35^0 30' 4''$.
217. $c = 0{,}15296$; $A = 18^0 33' 54''$; $B = 71^0 26' 6''$.
218. $c = 3{,}652$; $A = 55^0 13' 42''$; $B = 34^0 46' 18''$.
219. $c = 148728$; $A = 2^0 6' 25''$; $B = 87^0 53' 35''$.
220. $c = 1{,}02198$; $A = 15^0 54' 4''$; $B = 74^0 5' 56''$.
221. $c = 4{,}1768$; $A = 16^0 41' 47''$; $B = 73^0 18' 13''$.
222. $c = 0{,}18188$; $A = 28^0 23' 28''$; $B = 61^0 36' 32''$.
223. $c = 14{,}292$; $A = 45^0 47' 58''$; $B = 44^0 12' 2''$.
224. $c = 0{,}029469$; $A = 16^0 33' 41''$; $B = 73^0 26' 19''$.
225. $b = 10{,}932$; $h = 13{,}179$; $B = 45^0 3' 12''$.
226. $b = 2{,}4501$; $h = 0{,}9801$; $B = 102^0 40' 38''$.
227. $b = 0{,}19315$; $h = 0{,}22719$; $A = C = 66^0 58' 17''$.
228. $a = 0{,}27133$; $h = 0{,}13563$; $B = 120^0 1' 4''$.
229. $a = 61{,}516$; $h = 57{,}476$; $A = C = 69^0 7' 16''$.
230. $h = 0{,}8858$; $B = 45^0 53' 22''$; $A = C = 67^0 3' 19''$.
231. $b = 0{,}092045$; $B = 136^0 12' 28''$; $A = C = 21^0 53' 46''$.
232. $a = c = 9{,}2613$; $B = 115^0 14' 12''$; $A = C = 32^0 22' 54''$.
233. $a = c = 1{,}6299$; $b = 2{,}651$; $B = 108^0 49' 4''$.
234. $a = c = 1258{,}5$; $b = 1121{,}1$; $A = C = 63^0 33' 0'',5$.
235. $a = 0{,}1311$; $c = 0{,}10314$; $A = 80^0 22' 8''$.
236. $b = 2{,}1307$; $c = 0{,}99542$; $A = 110^0 35' 30''$.
237. $a = 0{,}34408$; $b = 0{,}32557$; $C = 11^0 16' 52''$.
238. $b = 9{,}0926$; $c = 5{,}615$; $A = 87^0 18' 21''$.
239. $a = 2{,}5166$; $c = 2{,}2165$; $B = 19^0 30' 58''$.
240. $b = 147{,}11$; $c = 152{,}87$; $C = 47^0 35' 54''$.
241. $b = 19{,}359$; $c = 28{,}406$; $A = 140^0 7' 57''$.
242. $a = 4{,}4844$; $b = 2{,}6087$; $A = 93^0 32' 35''$.
243. $a = 2{,}2734$; $c = 3{,}3352$; $C = 117^0 58' 41''$.
244. $b = 5552{,}1$; $c = 5257{,}6$; $C = 39^0 54' 33''$.
245. $c = 4{,}9914$; $A = 97^0 58' 49''$; $B = 52^0 23' 47''$.
246. $c = 280{,}78$; $A = 112^0 29' 54''$; $B = 18^0 44' 42''$.
247. $c = 79{,}658$; $A = 35^0 1' 58''$; $B = 31^0 6' 26''$.
248. $b = 1{,}8045$; $A = 45^0 21' 20''$; $C = 90^0 42' 2''$.
249. $a = 10{,}813$; $B = 43^0 38' 49'',5$; $C = 67^0 27' 25'',5$.
250. $c = 0{,}11446$; $B = 123^0 43' 3''$; $A = 48^0 59' 21''$.
251. $b = 15{,}365$; $A = 56^0 41' 47''$; $C = 31^0 13' 15''$.
252. $c = 1{,}4085$; $A = 9^0 53' 49''$; $B = 22^0 5' 43''$.
253. $a = 43{,}682$; $B = 84^0 29' 48'',5$; $C = 45^0 29' 27'',5$.
254. $b = 8{,}9326$; $A = 112^0 17' 46''$; $C = 23' 56''$.
255. $A = 133^0 8' 48''$; $B = 28^0 45' 56''$; $C = 18^0 5' 14''$.

256. $A = 95^0 3' 32''$; $B = 41^0 36' 38''$; $C = 43^0 19' 50''$.
257. $A = 36^0 46' 48''$; $B = 65^0 31' 4''$; $C = 77^0 42' 10''$.
258. $A = 48^0 28' 14''$; $B = 93^0 28' 42''$; $C = 38^0 3' 4''$.
259. $A = 18^0 58' 40''$; $B = 122^0 7' 32''$; $C = 38^0 53' 48''$.
260. $A = 47^0 25' 50''$; $B = 78^0 19' 56''$; $C = 54^0 14' 16''$.
261. $A = 19^0 42' 34''$; $B = 24^0 53' 26''$; $C = 135^0 24'$.
262. $A = 73^0 19' 12''$; $B = 50^0 34' 48''$; $C = 56^0 5' 58''$.
263. $A = 37^0 22' 2''$; $B = 55^0 25' 18''$; $C = 87^0 12' 40''$. **264.** Невозможно.
265. $b = 15{,}797$; $B = 90^0 52' 21''$; $C = 30^0 25' 22''$.
266. $c = 0{,}10299$; $B = 48^0 48' 54''$; $C = 50^0 48' 59''$.
267. $c = 2{,}5344$; $B = 43^0 47' 13''$; $C = 89^0 29''$.
268. $a = 0{,}32441$; $A = 9^0 53' 49''$; $B = 22^0 5' 43''$.
269. $b = 120{,}01$; $B = 18^0 44' 43''$; $C = 48^0 45' 22''$.
270. $c = 13{,}831$; $A = 44^0 1' 18''$; $C = 97^0 44' 13''$ или $c = 1{,}4123$; $A = 135^0 58' 42''$; $C = 5^0 46' 49''$.
271. $c = 576{,}93$; $A = 30^0 16' 30''$; $C = 124^0 16' 42''$ или $c = 58{,}767$; $A = 149^0 43' 30''$; $C = 4^0 49' 42''$.
272. $b = 409{,}78$; $B = 121^0 33' 53''$; $C = 34^0 2' 23''$ или $b = 80{,}458$; $B = 9^0 38' 39''$; $C = 145^0 57' 37''$.
273. Невозможно. **274.** Невозможно.

Отдѣлъ X. **1.** $\operatorname{tg}\alpha = a : b$; $\alpha = 40^0 4' 45'',77$. **2.** $h : \operatorname{tg}\alpha = 9{,}87$ саж. **3.** 1264,96 фута. **4.** 396,53 фута. **5.** 155,8 саж. **6.** 190,1211 фута. **7.** 211,7583 саж. **8.** $x = 62^0 7' 30'',78$; $y = 150^0 34' 29'',22$; $AD = 678{,}27$ саж.; $CD = 421{,}35$ саж. **9.** $x = 152^0 50' 48'',64$; $y = 44^0 16' 59'',7$; $AD = 130{,}605$ фута; $CD = 701{,}883$ фута. **10.** $x = \sqrt{\frac{k+h}{k-l}\cdot hl}$.

11. $h + \frac{a}{2b}\sqrt{(b+a)(3b-a)}$. **12.** $h + \frac{b\sin\alpha\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)} = 1710{,}39$ фута.

13. $AB = a(1+\sqrt{2})$; $BC = a\sqrt{2+\sqrt{2}}$. **14.** $x = a\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$.

15. $\frac{1}{2}(3+\sqrt{3})$ километра. **16.** $a(3-\sqrt{3})$ миль.

17. $\frac{b\cos\alpha\sin\beta}{\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}}$; $h + \frac{b\sin\alpha\sin\beta}{\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}}$.

18. $AB = h + \frac{a}{3}$; $CD = h + \frac{3}{4}a$. **19.** $h\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \gamma\right) : \sin\gamma\cos\frac{\beta-\alpha}{2}$.

20. $\frac{h\sin(\beta+\alpha)}{\sin(\beta-\alpha)}$. **21.** $\frac{h\sin\gamma\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta\sin(\alpha+\gamma)}$. **22.** $AE = a\sqrt{\frac{c(a+b)}{ac-b^2}}$; $BE = b\sqrt{\frac{a(b+c)}{ac-b^2}}$; $\cos\Theta = \sqrt{\frac{(a+b)(b+c)}{4ac}}$.

Отдѣлъ XI. **1.** $\frac{1}{4}c^2\sin 2A = 18{,}1273$. **2.** $\frac{1}{2}a^2\operatorname{ctg} A = 0{,}0648905$. **3.** $\frac{1}{2}b^2\operatorname{tg} A = 14{,}45097$. **4.** 0,1210459. **5.** 883,9377. **6.** 0,2792332. **7.** 176,2459. **8.** 1,60305. **9.** 11230,18. **10.** 54,03596. **11.** 0,121046.

12. Зад. невозможна. **13.** 0,7533788. **14.** 54,71913. **15.** 0,064819.

16. $\dfrac{h^2 \sin A}{2 \sin B \sin C} = 1{,}246038$. **26.** $\dfrac{(a^2 - b^2) \sin A \sin D}{2 \sin (A + D)}$.

27. $a = 0{,}8096979$ арш.; $s = 83{,}30323$ □ арш.

28. $p = 16{,}05233$ саж.; $s = 20{,}49333$ □ саж.

29. $a = 0{,}1429417$ саж.; $s = 1{,}458006$ □ саж.

30. $p = 28{,}28582$ фута; $s = 63{,}6431$ □ фута. **31.** 140,5697 □ арш.

32. $r = 22{,}8601$ метра; $R = 22{,}94743$ метра.

33. $r = 0{,}5818123$ саж.; $R = 0{,}5864366$ саж.

34. $\frac{1}{2}(r\alpha - r^2 \sin \alpha) = 0{,}2132403$ □ арш.

35. $\dfrac{a^2k}{8} \operatorname{cosec}^2 \dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{a^2}{4} \operatorname{ctg} \dfrac{\alpha}{2} = 0{,}06081643$ □ фута, гдѣ k означаетъ длину дуги α, при радіусѣ, равномъ 1.

59. $p(p-a) \operatorname{tg} \dfrac{A}{2} = q$. **60.** $A + B = 180^0 - C$; $\operatorname{ctg} B - \operatorname{ctg} A = \dfrac{a^2 - b^2}{2q}$.

61. $B + C = 180^0 - A$; $a^2 + b^2 + c^2 = 4q(\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C)$.

62. $4 \cos^2 \alpha$. **63.** $\dfrac{q}{q_1} = \sin \dfrac{A}{2} \sin \dfrac{B}{2} \sin \dfrac{C}{2}$; $\dfrac{R}{R_1} = 4 \sin \dfrac{A}{2} \sin \dfrac{B}{2} \sin \dfrac{C}{2}$.

64. $\dfrac{q_1}{q} = 2 \cos A \cos B \cos C$; $\dfrac{R_1}{R} = \dfrac{1}{2}$; $\dfrac{r_1}{r} = \dfrac{\cos A \cos B \cos C}{2 \sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} C}$.

66. $a = 2R \sin A$. **67.** $a \sin \dfrac{B}{2} \sin \dfrac{C}{2} = r \cos \dfrac{A}{2}$.

68. $a \cos \dfrac{B}{2} \cos \dfrac{C}{2} = r_a \cos \dfrac{A}{2}$. **69.** $\operatorname{tg}^2 \dfrac{A}{2} = \dfrac{rr_a}{r_b r_c}$.

70. $p = 4R \cos \dfrac{A}{2} \cos \dfrac{B}{2} \cos \dfrac{C}{2}$; $B + C = 180^0 - A$.

71. $r = p \operatorname{tg} \dfrac{A}{2} \operatorname{tg} \dfrac{B}{2} \operatorname{tg} \dfrac{C}{2}$; $B + C = 180^0 - A$. **72.** $\operatorname{tg} \dfrac{A}{2} = \dfrac{r}{p-a}$.

73. $r = 4R \sin \dfrac{A}{2} \sin \dfrac{B}{2} \sin \dfrac{C}{2}$. **74.** $r_a = 4R \sin \dfrac{A}{2} \cos \dfrac{B}{2} \cos \dfrac{C}{2}$.

75. $r_a = r \operatorname{ctg} \dfrac{B}{2} \operatorname{ctg} \dfrac{C}{2}$. **76.** $r_a : r_b = \operatorname{ctg} \dfrac{B}{2} : \operatorname{ctg} \dfrac{A}{2}$.

77. $\sin \dfrac{B}{2} \sin \dfrac{C}{2} = r : 4R \sin \dfrac{A}{2}$.

78. $\cos^2 \dfrac{C}{2} = \dfrac{r_a + r_b}{4R}$; $\sin \dfrac{A}{2} \sin \left(90^0 - \dfrac{B}{2}\right) = r_a : 4R \cos \dfrac{C}{2}$.

79. $\operatorname{tg} \dfrac{A}{2} = \dfrac{rr_a}{q}$. **80.** $\operatorname{tg} \dfrac{C}{2} = \dfrac{q}{r_a r_b}$.

Отдѣлъ XII. 1. $\rho = 5$ и $\varphi = 53^0 7' 48'',36$ съ точн. до $0'',01$.

2. $\sqrt{6}(\cos 30^0 + \sqrt{-1} \sin 30^0) = \dfrac{\sqrt{6}(\sqrt{3} + \sqrt{-1})}{2}$.

3. $2(\cos 30^0 + \sqrt{-1} \sin 30^0)$. **4.** $\sqrt{2}(\cos 60 + \sqrt{-1} \sin 60^0) = \dfrac{\sqrt{2}(1 + \sqrt{-3})}{2}$.

5. $64(\cos 36^0 - \sqrt{-1}\sin 36^0)$. **6.** $\cos 2^0 + \sqrt{-1}\sin 2^0$. **7.** -1 и $\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}$.

8. $\cos\frac{\pi}{6} + \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{6}$, $\cos\frac{\pi}{2} + \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{2}$ и $\cos\frac{5\pi}{6} + \sqrt{-1}\sin\frac{5\pi}{6}$.

9. $\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{12}\right)$, $\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + \sqrt{-1}\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ и $\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + \sqrt{-1}\sin\frac{17\pi}{12}\right)$.

10. $\sqrt[5]{4}$, $\frac{1}{4}\left(\sqrt{5}-1\pm\sqrt{-10-2\sqrt{5}}\right)\sqrt[5]{4}$ и $\frac{1}{4}\left(-\sqrt{5}-1\pm\sqrt{2\sqrt{5}-10}\right)\sqrt[5]{4}$.

11. $-\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ и $\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}\cdot\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$. **12.** $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} - \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{12}\right)$, $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} - \sqrt{-1}\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ и $\sqrt{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12} - \sqrt{-1}\sin\frac{17\pi}{12}\right)$.

13. $\sqrt[3]{3}$, $\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}\cdot\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{2}$ и $\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}\cdot\sqrt[3]{2}$.

14. $\frac{\pm1\pm\sqrt{-3}}{2}$. **15.** $\vartheta = 29^0 26' 58''$ съ точн. до $1''$.

16. $\sin 5^0 = 0{,}0871557$; $\cos 10^0 = 0{,}9848078$. **18.** $\frac{\sin^2 n\alpha}{\sin\alpha}$. **19.** $\frac{\sin 2n\alpha}{2\sin\alpha}$.

20. $\sin\left\{\alpha + \frac{(n-1)(\beta+\pi)}{2}\right\}\sin\frac{n(\beta+\pi)}{2} : \sin\frac{\beta+\pi}{2}$.

21. $\cos\left\{\alpha + \frac{(n-1)(\beta+\pi)}{2}\right\}\sin\frac{n(\beta+\pi)}{2} : \sin\frac{\beta+\pi}{2}$.

22. Въ 20 зад. положите $\beta = \alpha$. **23.** Въ 20 зад. положите $\beta = 2\alpha$.

24. Въ 21 зад. положите $\beta = \alpha$. **25.** Въ 21 зад. положите $\beta = 2\alpha$.

26. $\operatorname{cosec}\alpha[\operatorname{tg}(n+1)\alpha - \operatorname{tg}\alpha]$. **27.** $\frac{1}{2}\left[n - \frac{\cos(n+1)\alpha\sin n\alpha}{\sin\alpha}\right]$.

28. $\frac{1}{2}\left[n - \frac{\sin 4n\alpha}{2\sin 2\alpha}\right]$. **29.** $\frac{1}{2}\left[n + \frac{\cos(n+1)\alpha\sin n\alpha}{\sin\alpha}\right]$.

30. $\frac{1}{2}\left[n + \frac{\sin 4n\alpha}{2\sin 2\alpha}\right]$. **31.** $\sin^3\alpha = \frac{1}{4}(3\sin\alpha - \sin 3\alpha)$.

32. $\cos^3\alpha = \frac{1}{4}(3\cos\alpha + \cos 3\alpha)$. **33.** $\sin^4\alpha = \frac{1}{4}(1 - 2\cos 2\alpha + \cos^2 2\alpha)$.

34. $\cos^4\alpha = \frac{1}{4}(1 + 2\cos 2\alpha + \cos^2 2\alpha)$.

35. $\cos\alpha\cos(\alpha+\vartheta) = \frac{1}{2}(\cos 2\alpha\cos\vartheta - \sin 2\alpha\sin\vartheta + \cos\vartheta)$;
$s = \frac{n}{2}\cos\vartheta + \frac{\cos(2\alpha+n\vartheta)\sin n\vartheta}{2\sin\vartheta}$. **36.** $\frac{\sin(2n+1)\alpha\sin n\alpha}{2\sin\alpha} + \frac{n\sin n\alpha}{2}$.

37. $\frac{n}{2}\cos\alpha - \frac{\cos(n+2)\alpha\sin n\alpha}{2\sin\alpha}$. **38.** $\frac{1}{2}(\cos 2\alpha - \cos 2^{n+1}\alpha)$.

42. $\sin\alpha\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}(\sin\alpha-\frac{1}{2}\sin 2\alpha)$; $s=2^{n-2}\sin\frac{\alpha}{2^{n-1}}-\frac{\sin 2\alpha}{4}$.

43. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sec\alpha=\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; $s=\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2^n}$.

44. $\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{2\sin^2\frac{1}{2}\alpha}-\frac{1}{\sin^2\alpha}$; $s=\frac{1}{2\sin^2\frac{1}{2}\alpha}-\frac{2^{n-1}}{\sin^2 2^{n-1}\alpha}$.

45. $\frac{1}{\sin\alpha\sin 2\alpha}=\operatorname{cosec}\alpha(\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}2\alpha)$; $s=\operatorname{cosec}\alpha[\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}(n+1)\alpha]$.

46. $s=\operatorname{cose}\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\left[\operatorname{tg}(n+1)\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)-\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\right]$.

47. $s=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2^{n-2}}-\cos 4\alpha\right)$. **48.** $s=\frac{1}{2}\operatorname{cosec}\alpha[\operatorname{tg}(n+1)\alpha-\operatorname{tg}\alpha]$.

49. $\frac{1}{2}\operatorname{cosec}\frac{\alpha}{2}\left\{\sec\frac{2n+1}{2}\alpha-\sec\frac{\alpha}{2}\right\}$. **50.** $\frac{1}{2}\left\{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-3^n\operatorname{ctg}\frac{3^n\alpha}{2}\right\}$.

51. $\cos\alpha-\sin\alpha\operatorname{ctg}2^n\alpha$. **52.** $OB.\sin\frac{(n+1)\alpha}{4n}\sin\frac{\alpha}{2}:\sin\frac{\alpha}{2n}$ **53.** $2nr^2$.

54. $3nr^2$. **55.** $2R\left(1-n^2\sin^2\frac{\pi}{2n}\right)$. **56.** $16\pi R^2\sin^2\frac{\pi}{2n}\left\{\frac{n}{4}\sin^2\frac{\pi}{2n}+\frac{n-4}{8}\right\}$.

Отдѣлъ XIII. **1.** 30^0. **2.** 30^0. **3.** 135^0. **4.** 135^0. **5.** $71^0 2'21''$,39. **6.** $26^0 6'17''$,98. **7.** $63^0 26'5''$,82. **8.** $43^0 21'37''$,01. **9.** $13^0 40'39''$,41. **10.** $18^0 23'22''$,97. **11.** 9,480615. **12.** 1,468341. **13.** 0,7387381. **14.** 0,7079469. **15.** $29^0 51'25''$,7. **16.** $18^0 38'17''$,64. **17.** 0,4795858. **18.** $41^0 41'56''$,53. **19.** 5,185695. **20.** $45^0 42'50''$,17. **21.** 1,517932. **22.** 0,507266. **23.** 5,684566. **24.** $45^0 4'36''$,79. **25.** 0,8966739. **26.** 0,7121141.

27. 1. **28.** ∞. **29.** $\frac{1}{2057}$. **53.** $x^2=\frac{2}{17}(5-2\sqrt{2})$. **54.** $x=0$ и $\frac{1}{2}$.

55. $x=\frac{a+b}{1-ab}$. **56.** $x=0$, $\frac{1}{2}$ и 1. **57.** $x=\pm\sqrt{\frac{2}{a}}$. **58.** $x=\pm\frac{1}{3}$.

59. $x=\sqrt{3}$ и $-\frac{1}{\sqrt{3}}$. **60.** $x=0$ и $\pm\frac{1}{\sqrt{7}}$. **61.** $x=0$ и $\pm\frac{1}{2}$.

62. 0 и $\pm\frac{1}{2}$. **63.** $x=-\frac{461}{9}$. **64.** $x=\pm 1$ и $\pm(1\pm\sqrt{2})$.

65. $x=a$ и a^2-a+1. **67.** $x=2$ и $y=1$.

68. $\operatorname{arc\,ctg}\left(1+\frac{2}{n}\right)$. **69.** $\frac{\pi}{4}-\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{n+1}$. **70.** $\operatorname{arc\,tg} nx$.

ТАБЛИЦА I.

ДЛИНЫ ХОРДЪ ПРИ РАДІУСѢ = 1000.

Углы	0′	5′	10′	15′	20′	25′	30′	35′	40′	45′	50′	55′
0°	0	2	3	4	6	7	9	10	12	13	14	16
1	17	19	20	22	23	25	26	28	29	30	32	33
2	35	36	38	39	41	42	44	45	46	48	49	51
3	52	54	55	57	58	60	61	62	64	65	67	68
4	70	71	73	74	76	77	78	80	81	83	84	86
5	87	89	90	92	93	94	96	97	99	100	102	103
6	105	106	108	109	110	112	113	115	116	118	119	121
7	122	123	125	126	128	129	131	132	134	135	137	138
8	139	141	142	144	145	147	148	150	151	153	154	155
9	157	158	160	161	163	164	166	167	168	170	171	173
10	174	176	177	179	180	182	183	184	186	187	189	190
11	192	193	195	196	197	199	200	202	203	205	206	208
12	209	210	212	213	215	216	218	219	221	222	223	225
13	226	228	229	231	232	233	235	236	238	239	241	242
14	244	245	247	248	249	251	252	254	255	257	258	260
15	261	262	264	265	267	268	270	271	273	274	275	277
16	278	280	281	283	284	285	287	288	290	291	293	294
17	296	297	298	300	301	303	304	306	307	309	310	311
18	313	314	316	317	319	320	321	323	324	326	327	329
19	330	331	333	334	336	337	339	340	342	343	344	346
20	347	349	350	352	353	354	356	357	359	360	362	363
21	364	366	367	369	370	372	373	374	376	377	379	380
22	382	383	384	386	387	389	390	392	393	394	396	397
23	399	400	402	403	404	406	407	409	410	412	413	414
24	416	417	419	420	421	423	424	426	427	429	430	431
25	433	434	436	437	439	440	441	443	444	446	447	448
26	450	451	453	454	456	457	458	460	461	463	464	465
27	467	468	470	471	473	474	475	477	478	480	481	482
28	484	485	487	488	489	491	492	494	495	496	498	499
29	501	502	504	505	506	508	509	511	512	513	515	516
30	518	519	520	522	523	525	526	527	529	530	532	533
31	534	536	537	539	540	541	543	544	546	547	548	550
32	551	553	554	555	557	558	560	561	562	564	565	567
33	568	569	571	572	574	575	576	578	579	581	582	583
34	584	586	587	589	590	592	593	594	596	597	599	600
35	601	603	604	606	607	608	610	611	612	614	615	617
36	618	619	621	622	624	625	626	628	629	630	632	633
37	635	636	637	639	640	641	643	644	646	647	648	650
38	651	652	654	655	657	658	659	661	662	663	665	666
39	668	669	670	672	673	674	676	677	679	680	681	683
40	684	685	687	688	689	691	692	694	695	696	698	699
41	700	702	703	704	706	707	709	710	711	713	714	715
42	717	718	719	721	722	723	725	726	728	729	730	732
43	733	734	736	737	738	740	741	743	744	745	746	748
44	749	751	752	753	755	756	757	759	760	761	763	764
Углы	0′	5′	10′	15′	20′	25′	30′	35′	40′	45′	50′	55′

ТАБЛИЦА I.

ДЛИНЫ ХОРДЪ ПРИ РАДІУСѢ = 1000.

Углы	0′	5′	10′	15′	20′	25′	30′	35′	40′	45′	50′	55′
45	765	767	768	769	771	772	773	775	776	777	779	780
46	781	783	784	785	787	788	789	791	792	793	795	796
47	797	799	800	801	803	804	805	807	808	809	811	812
48	813	815	816	817	819	820	821	823	824	825	827	828
49	829	831	832	833	835	836	837	839	840	841	843	844
50	845	847	848	849	850	852	853	854	856	857	858	860
51	861	862	864	865	866	868	869	870	871	873	874	875
52	877	878	879	881	882	883	885	886	887	888	890	891
53	892	894	895	896	898	899	900	901	903	904	905	907
54	908	909	911	912	913	914	916	917	918	920	921	922
55	923	925	926	927	929	930	931	932	934	935	936	938
56	939	940	941	943	944	945	947	948	949	951	952	953
57	954	956	957	958	959	961	962	963	964	966	967	968
58	970	971	972	973	975	976	977	978	980	981	982	984
59	985	986	987	989	990	991	992	994	995	996	997	999
60	1000	1001	1002	1004	1005	1006	1007	1009	1010	1011	1013	1014
61	1015	1016	1018	1019	1020	1021	1023	1024	1025	1026	1028	1029
62	1030	1031	1033	1034	1035	1036	1037	1039	1040	1041	1042	1044
63	1045	1046	1047	1049	1050	1051	1052	1054	1055	1056	1057	1059
64	1060	1061	1062	1063	1065	1066	1067	1068	1070	1071	1072	1073
65	1075	1076	1077	1078	1079	1081	1082	1083	1084	1086	1087	1088
66	1089	1090	1092	1093	1094	1095	1097	1098	1099	1100	1101	1103
67	1104	1105	1106	1107	1109	1110	1111	1112	1114	1115	1116	1117
68	1118	1120	1121	1122	1123	1124	1126	1127	1128	1129	1130	1132
69	1133	1134	1135	1136	1138	1139	1140	1142	1143	1144	1145	1146
70	1147	1148	1149	1151	1152	1153	1154	1155	1157	1158	1159	1160
71	1161	1163	1164	1165	1166	1167	1168	1170	1171	1172	1173	1174
72	1176	1177	1178	1179	1180	1181	1183	1184	1185	1186	1187	1188
73	1190	1191	1192	1193	1194	1195	1197	1198	1199	1200	1201	1202
74	1204	1205	1206	1207	1208	1209	1211	1212	1213	1214	1215	1216
75	1217	1219	1220	1221	1222	1223	1224	1226	1227	1228	1229	1230
76	1231	1232	1234	1235	1236	1237	1238	1239	1240	1242	1243	1244
77	1245	1246	1247	1248	1250	1251	1252	1253	1254	1255	1256	1257
78	1259	1260	1261	1262	1263	1264	1265	1266	1268	1269	1270	1271
79	1272	1273	1274	1275	1277	1278	1279	1280	1281	1282	1283	1284
80	1286	1287	1288	1289	1290	1291	1292	1293	1294	1296	1297	1298
81	1299	1300	1301	1302	1303	1304	1305	1307	1308	1309	1310	1311
82	1312	1313	1314	1315	1316	1318	1319	1320	1321	1322	1323	1324
83	1325	1326	1327	1328	1330	1331	1332	1333	1334	1335	1336	1337
84	1338	1339	1340	1341	1343	1344	1345	1346	1347	1348	1349	1350
85	1351	1352	1353	1354	1355	1356	1358	1359	1360	1361	1362	1363
86	1364	1365	1366	1367	1368	1369	1370	1371	1372	1373	1375	1376
87	1377	1378	1379	1380	1381	1382	1383	1384	1385	1386	1387	1388
88	1389	1390	1391	1392	1393	1394	1396	1397	1398	1399	1400	1401
89	1402	1403	1404	1405	1406	1407	1408	1409	1410	1411	1412	1413
Углы	0′	5′	10′	15′	20′	25′	30′	35′	40′	45′	50′	55′

ТАБЛИЦА II.

ДЛИНЫ ТАНГЕНСОВЪ ПРИ РАДІУСѢ = 1000.

Углы	0′	5′	10′	15′	20′	25′	30′	35′	40′	45′	50′	55′
0°	0	1	3	4	6	7	9	10	12	13	15	16
1	17	19	20	22	23	25	26	28	29	31	32	33
2	35	36	38	39	41	42	44	45	47	48	49	51
3	52	54	55	57	58	60	61	62	64	65	67	68
4	70	71	73	74	76	77	79	80	82	83	84	86
5	87	89	90	92	93	95	96	97	99	100	102	103
6	105	106	108	109	111	112	114	115	116	117	119	121
7	123	124	126	127	129	130	132	133	135	136	137	139
8	140	142	143	145	146	148	149	151	152	154	155	157
9	158	160	161	163	164	166	167	169	170	172	173	175
10	176	178	179	181	182	184	185	187	188	190	191	193
11	194	196	197	199	200	202	203	205	206	208	209	211
12	212	214	215	217	219	220	222	223	225	226	228	229
13	231	232	234	235	237	238	240	242	243	245	246	248
14	249	251	252	254	255	257	258	260	262	263	265	266
15	368	269	271	273	274	276	277	279	280	282	283	285
16	287	288	290	291	293	395	296	298	299	301	302	304
17	306	307	309	310	312	314	315	317	318	320	322	323
18	325	326	328	330	331	333	334	236	338	339	341	343
19	344	346	347	349	351	352	354	356	357	359	361	362
20	364	366	367	369	370	372	374	375	377	379	380	382
21	384	385	387	389	390	292	394	395	397	399	401	402
22	404	406	407	409	411	412	414	416	418	419	421	423
23	424	426	428	430	431	433	435	436	438	440	442	443
24	445	447	449	450	452	454	456	457	459	461	463	464
25	466	468	470	472	473	475	477	479	480	482	484	486
26	488	489	491	493	495	497	498	500	502	504	506	508
27	509	511	513	515	517	519	520	522	524	526	528	530
28	532	533	535	537	539	541	543	545	547	549	550	552
29	554	556	558	560	562	564	566	568	570	571	573	575
30	577	579	581	583	585	587	589	591	593	595	597	599
31	601	603	605	607	609	611	613	615	617	619	621	623
32	625	627	629	631	633	635	637	639	641	643	645	647
33	649	651	653	656	658	660	662	664	666	668	670	672
34	674	677	679	681	683	685	687	689	691	694	696	698
35	700	702	704	707	709	711	713	715	718	720	722	724
36	726	729	731	733	735	738	740	742	744	747	749	751
37	753	756	758	760	763	765	767	770	772	774	777	779
38	781	784	786	788	791	793	795	798	800	802	805	807
39	810	812	815	817	819	822	824	827	829	832	834	837
40	839	841	844	846	849	851	854	856	859	862	864	867
41	869	872	874	877	879	882	885	887	890	892	895	898
42	900	903	906	908	911	914	916	919	922	924	927	930
43	932	935	938	941	943	946	949	952	954	957	960	963
44	966	968	971	974	977	980	983	985	988	991	994	997
Углы	0′	5′	10′	15′	20′	25′	30′	35′	40′	45′	50′	55′

